ניגזרת חלקית מסדר גבוה

I חשב את הנגזרות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

1. $u = x^3 + 3xy^2 - 4x^2y^5 + 1$ 2. $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3. $u = xy + yz + zx$

4. $u = x^m y^n$ 5. $g = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 6. $z = e^{x^2 y}$

7. $u = 2x^3y + x^2z^3$ 8. $k = e^x \ln y + 3x + 2y - 5$

פונקציה סתומה

II

נניח שמשוואות הבאות מגדירות את הפונקציה סתומה $y(x)$. מצא את הניגזרות שלה :

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. $y'' = ?\,,\ y' = ?$

2. $y - 2\sin y = x$. $y'' = ?\,,\ y' = ?$

3. $xy^2 + x^5 = 2x$. $y' = ?$

4. $x^y = y^x$. $y' = ?$

5. בדוק שהמשוואה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ מגדירה פונקציה סתומה $z = f(x,y)$ בסביבת הנקודה $(0,0,a)$. מצא $z'_x\ ,\ z'_y\ ,\ z''_{xx}\ ,\ z''_{yy}\ ,\ z''_{xy}$.

6. נניח שמשוואה $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ מגדירה פונקציה סתומה $z = g(x,y)$.
הוכח שהפונקציה $z = g(x,y)$ מקיימת את המשוואה $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

7. בדוק שהמשוואה $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ מגדירה פונקציה סתומה $z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,1)$. חשב $z'_x(1,1)\ ,\ z'_y(1,1)$.

דיפרנציאל

III חשב את הדיפרנציאל של הפונקציה

1. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$ 2. $u = x^2y + y^2z + x^2z$

3. $p = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 4. $h = x^3y^2 + 1$

5. $u = z/(x^2 + y^2)$ 6. $g = x^2y^4 + xy^2 - 3x^2z + z^2y$

IV חשב בקרוב

1. $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ 2. $\sin 32^\circ \cdot \tan 40^\circ$

3. $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ 4. $\arctan\frac{1.01}{0.98}$

5. $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$

נגזרת כיוונית, גרדיאנט

V

1. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $z = x^2 - xy + y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.
2. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $u = xy^2z^3$ בנקודה $M(3,2,1)$ בכיוון $\vec{a} = (2,2,1)$.
3. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $z = x^2 - y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה-X.
4. הוכח שהנגזרת הכיוונית של $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ בנקודה $M(x,y,z)$ כלשהי בכיוון מ-M לראשית שווה ל- $(-2u/r)$, כאשר $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u = xe^{|\vec{r}|}$, $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ בנקודה $(0,1,0)$.

6. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ בנקודה $(1,1,1)$.

7. מצא נקודות שבהן הגרדיאנט של השדה הסקלרי $z=\sin(x+y)$ שווה ל- $\vec{i}+\vec{j}$.

8. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=xyz$ וכיוון שלו בנקודה $M(2,1,1)$.

9. א. מצא את כיוון בו קצב ההישתנות של השדה הסקלרי $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ בנקודה $M(1,2,1)$ הוא מקסימלי
ב. מצא את הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של u בנקודה $M(1,2,1)$.

10. חשב את הנגזרת של הפונקציה $z=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית α עם הציר ה-X. באיזה כיוון הנגזרת זו מקבלת א) ערך גדול ביותר ? ב) ערך קטן ביותר ? ג) הערך 0 ?

11. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u=xyz$ בנקודה $M(1,1,1)$ בכיוון $\vec{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. מהו גודל הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה זו ?

12. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M_0(-4,3)$ בכיוון הנורמל לקו הגובה העובר דרך M_0.

13. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=3x^2+5y^2+z^2$ העובר דרך הנקודה $M_0(1,-1,\ 2)$ ונגזרת מכוונת של הפונקציה $u(x,y,z)$ בנקודה M_0 בכיוון הנורמל למשטח רמה (α).

14. בדוק שהמשוואה $x+yz+z^3=6$ מגדירה פונקציה סתומה $z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(3,2,1)$.
א חשב $z'_x(3,2)$, $z'_y(3,2)$.
ב חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $z(x,y)$ בנקודה $(3,2)$ בכיוון $\vec{n}=(0.6,-0.8)$.
ג מצא $z''_{yy}(x,y)$ וחשב $z''_{yy}(3,2)$.

<u>משוואת מישור משיק ונורמל למשטח</u>

VI

כתוב את משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $x_0=1,\ y_0=2$ 2) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2}$, $x_0=3,\ y_0=1$

כתוב את משוואת הנורמל לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

3) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$, $x_0=1,\ y_0=1$ 4) $f(x,y)=\dfrac{y+\ln x}{2}$, $x_0=1,\ y_0=1$

כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=0$ בנקודה M :

5) $x^2+y^2+z^2=169$, $M(3,4,12)$ 6) $2^{x/z}+2^{y/z}=8$, $M(2,2,1)$

7. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+2y^2+3z^2=21$ המקביל למישור $x+4y+6z=0$.

8. הוכח כי המשטחים הבאים

$$(S_1):\quad x^2+y^2+z^2=a\,x$$
$$(S_2):\quad x^2+y^2+z^2=b\,y$$
$$(S_3):\quad x^2+y^2+z^2=c\,z$$

כאשר $a,b,c\neq 0$ מאונכים זה לזה בכל נקודות חיתוך שלהם (הערה: שני משטחים מאונכים אם נורמלים שלהם מאונכים).

9. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ העובר דרך הנקודה $M_0(2,4,10)$. כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח רמה (α) בנקודה M_0.

נוסחת טיילור

I   פתח לפי נוסחת טיילור סביב נק' M (עד סדר שני) את הפונקציות :

1) $z(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5\ ,\ M(1,-2)$

2) $g(x,y)=x^y\ ,\ M(1,1)$ 3) $p(x,y)=\ln\dfrac{x}{y}\ ,\ M(1,1)$

II   פתח לפי נוסחת מקלורן (עד סדר שני) את הפונקציות :

1) $f=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 2) $g=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 3) $z=\dfrac{1}{1-x+2y}$ 4) $p=\ln(1+x+y)$

5) $v=e^x\cos y$ 6) $u=e^x\sin y$ 7) $q=\sin(x^2+y^2)$ 8) $z=(1+x)^m(1+y)^n$

תשובות :

I. 2) $f(x,y)=x^y\ ,\ M(1,1)\ ,\quad f_2(x,y)=f(1,1)+f'_x(1,1)(x-1)+f'_y(1,1)(y-1)+$

$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f''_{yy}(1,1)(y-1)^2\right]$$

$f'_x=yx^{y-1},\ f'_y=x^y\ln x\ ,\ f''_{xx}=y(y-1)x^{y-2},\ f''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\ ,\ f''_{yy}=x^y\ln^2 x$

$f(1,1)=1\ ,\quad f'_x(1,1)=1\ ,\quad f'_y(1,1)=0\ ,\quad f''_{xx}(1,1)=0\ ,\quad f''_{xy}(1,1)=1\ ,\quad f''_{yy}(1,1)=0$

$$f_2(x,y)=1+1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+\frac{1}{2}[0\cdot(x-1)^2+2\cdot1\cdot(x-1)(y-1)+0\cdot(y-1)^2]$$

$$f_2(x,y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$

VII תרגילים נוספים

1. לפונקציה $f(x,y,z)$ ידוע ש – $f'_x(1,1,2)=3$, $f'_y(1,1,2)=1$, $f'_z(1,1,2)=4$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $F(t)=f(\cos t,(t+1)^2,2e^t)$. חשב $F'(0)$.
2. לפונקציה $f(x,y)$ ידוע ש – $f'_x(3,1)=4$, $f'_y(3,1)=-1$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $H(z)=f\left(3z^2,2\sin\frac{\pi z}{6}\right)$. חשב $H'(1)$.
3. לפונקציה $g(x,y)$ ידוע ש – $g'_x(1,1)=2/3$.נגדיר פונקציה של משתנה אחד $G(v)=g\left(e^v,\cos v\right)$.

א   חשב $G'(0)$.

ב   ידוע גם ש – $g''_{xx}(1,1)=2/9$, $g'_y(1,1)=4/3$. חשב $G''(0)$.

תשובות

I.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x-8y^5$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-80x^2y^3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6y-40xy^4$

2. $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=1$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=m(m-1)x^{m-2}y^n$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=mnx^{m-1}y^{n-1}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)x^my^{n-2}$

6 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2ye^{x^2y}(2x^2y+1)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xe^{x^2y}(1+x^2y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4e^{x^2y}$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12xy+2z^3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6x^2z$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6x^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=6xz^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$

8. $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}=e^x\ln y$, $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x\partial y}=\dfrac{e^x}{y}$, $\dfrac{\partial^2 k}{\partial y^2}=-\dfrac{e^x}{y^2}$

II.

1. $y'=-\dfrac{x+y}{x-y}$, $y''=\dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$ 2. $y'=\dfrac{1}{1-2\cos y}$, $y''=-\dfrac{2\sin y}{(1-2\cos y)^3}$

3. $y'=-\dfrac{y^2+5x^4-2}{2xy}$

4. $y'=-\dfrac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}=-\dfrac{y}{x}\dfrac{yx^y-xy^x\ln y}{yx^y\ln x-xy^x}=-\dfrac{y}{x}\dfrac{y-x\ln y}{y\ln x-x}=\dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{1-\ln x}{1-\ln y}$

$$x^y=y^x\quad\Rightarrow\quad y\ln x=x\ln y\qquad,\qquad(y\neq e\Rightarrow x\neq e)$$

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{x^2+z^2}{z^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{y^2+z^2}{z^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-xy}{z^3}$

7. $z'_y(1,1)=-0.75$, $z'_x(1,1)=0.25$

III

1. $dz = (2xy^4 - 3x^2y^3 + 4x^3y^2)dx + (4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y)dy$

2. $du = (2xy + 2xz)dx + (x^2 + 2yz)dy + (x^2 + y^2)dz$ 3. $dp = \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

4. $dh = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$ 5. $du = \dfrac{-2xzdx - 2yzdy}{(x^2 + y^2)^2} + \dfrac{dz}{x^2 + y^2}$

6. $dg = (2xy^4 + y^2 - 6xz)dx + (4x^2y^3 + 2xy + z^2)dy + (2zy - 3x^2)dz$

IV

1) 108.972 2) 0.443 $\{z = \sin x \tan y,\ dx = 2\pi/180,\ d\,y = -5\pi/180\}$

3) 2.95 4) $(\pi/4) + 0.015 = 0.800$ 5) 3.037

V

1) 1.4 2) $22\frac{2}{3}$ 3) $1 - \sqrt{3}$ 5) $e\,\bar{i}$ 6) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 7) $y = -x + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

8) $\operatorname{grad} u\big|_{(2,1,1)} = (1,2,2)$, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

9) $\operatorname{grad} u\big|_{(1,2,1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\max \frac{\partial u}{\partial l}(M) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

10) $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$ א. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ב. $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ג. $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{7\pi}{4}$

11) $\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, $|\operatorname{grad} u\|_M = \sqrt{3}$ 12) 0.4

13) $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 12$, $grad\, u\,(1,-1,2) = (6,-10,4)$, $|\,grad\, u\,(1,-1,2)| = 2\sqrt{38}$

14) $z'_x(3,2) = -\frac{1}{5}$, $z'_y(3,2) = -\frac{1}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial \vec{n}}(3,2) = \frac{1}{25}$, $z''_{yy} = 2y\,z/(y + 3z^2)^3$, $z''_{yy}(3,2) = \frac{4}{125}$

VI

1) $2x + 4y - z = 5$ 2) $3x - y - z = 4$ 3) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z - \frac{\pi}{4}}{2}$

4) $x - 1 = y - 1 = \dfrac{z - 0.5}{-2}$ 5) $3x + 4y + 12z = 169$ 6) $x + y - 4z = 0$

7) $x + 4y + 6z = 21$, $x + 4y + 6z = -21$

9) $2x + 4y - z = 10$

VII 1) $F'(0) = 10$ 2) $H'(1) = 24 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ 3) $G'(0) = \dfrac{2}{3}$, $G''(0) = -\dfrac{4}{9}$