

תוך שימוש בשיטת כופלי לגרנז':

1. מצאו על עקום $x^4 + y^4 = 1$ את הנקודות הקרובות ביותר והרחוקות ביותר מראשית הצירים.

2. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר שפונקציה $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$ מקבלת על המעגל $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

3. בין הגלילים בעלי נפח V מצאו את הגליל עם שטח פנים מינימאלי (מצאו רדיוס וגובה של הגליל).

4. מצאו על המשטח $ax^2 + by^2 - cz^2 - 1 = 0$ את הנקודות (או נקודה) הקרובות ביותר לראשית הצירים $(a, b, c > 0)$.

5. מצאו על המשטח $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$ את הנקודות (או נקודה) הרחוקות ביותר ממישור $z = 0$.

תשובות:

$$1. \min : (0, \pm 1), (\pm 1, 0); \max : (\pm 1/\sqrt[4]{2}, \pm 1/\sqrt[4]{2})$$

$$2. \max : f(3, 4, -1) = 14; \min : f(1, 0, 5) = -14$$

$$3. (V = \pi r^2 h, S = 2\pi r h + 2\pi r^2 : \text{רמז}) \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

4. הנקודות הן:

$$\text{אם } a < b, (0, \pm 1/\sqrt{b}); \text{ אם } a > b, (\pm 1/\sqrt{a}); \text{ אם } a = b, \text{ מעגל}$$

$$. z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1/a$$

$$5. (1, 0, -2), (-1, 0, 2)$$