מדור בחינות

מסי נבחן: ____________________

תאריך הבחינה: 26.06.2011
מרצים: פרופ' ל. פריגוזין, דר' ט. דלצמן,
דר' ס. גבריאליאן
מבחן ב: חדו"א ג'2
מס הקורס: 201.1.9151
שנה: א' סמסטר: ב' מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (4 עמ'),
מחשב כיס עם צג קטן

יש לענות רק על 5 שאלות מתוך 6 ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

כל שאלה שווה 20 נקודות.

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u>. נתונה משוואה של משטח:

$$x^2+3y^2+e^z(x+y)z=4$$

1א) מצא מישור משיק למשטח זה בנקודה $(1,1,0)$ (5 נק')

1ב) בדוק כי משוואה זו מגדירה בסביבת נקודה $x=1, y=1$ פונקציה סתומה $z=z(x,y)$ המקיימת $z(1,1)=0$. (3 נק')

1ג) מצא את הנגזרות $z'_x(1,1), z'_y(1,1)$. האם הפונקציה עולה בכיוון מנקודה $(1,1)$ לנקודה $(5,-3)$? (חשב נגזרת כיוונית) (6 נק')

1ד) מצא נגזרת מעורבת $z''_{xy}(1,1)$. (6 נק')

<u>פתרון:</u> (1א) נמצא את הנגזרות: $\varphi(x,y,z)=x^2+3y^2+e^z(x+y)z-4$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x+ze^z, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=6y+ze^z, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=(x+y)e^z+(x+y)ze^z=(x+y)(z+1)e^z$$

בנקודה $A(1,1,0)$ נקבל

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(A)=2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(A)=6, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(A)=2$$

לכן המישור המשיק ב-A הוא

$$2(x-1)+6(y-1)+2\cdot z=0$$

$$2x+6y+2z-8=0 \Rightarrow \underline{x+3y+z-4=0}$$

(1ב) מאחר ש-$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(A)=2\neq 0$, לפי המשפט על פונקציה סתומה, המשוואה $\varphi(x,y,z)=0$ מגדירה בסביבת הנקודה $(1,1)$ פונקציה סתומה, המקיימת $z(1,1)=0$

(1ג)

$$z'_x(1,1)=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1,0)}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}(A)}=\underline{-1}, \quad z'_y(1,1)=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(A)}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}(A)}=\underline{-3}.$$

נמצא את הכיוון $\vec{l}$: $\vec{l}=\frac{(4,-4)}{\sqrt{16+16}}=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$. לכן

$$\frac{\partial z}{\partial\vec{l}}=(z'_x,z'_y)\cdot\vec{l}=-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{3}{\sqrt2}=\underline{\sqrt2>0}$$

לכן הפונקציה $z(x,y)$ <u>עולה</u> בכיוון הנתון.

(1ד)

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=\left(-\frac{2x+ze^z}{(x+y)(z+1)e^z}\right)'_y=-\frac{(z'_y\cdot e^z+ze^z\cdot z'_y)\cdot(x+y)(z+1)e^z-\left[(z+1)e^z+(x+y)z'_ye^z+(x+y)(z+1)e^z\cdot z'_y\right]\cdot(2x+ze^z)}{\left((x+y)(z+1)e^z\right)^2}=$$

$$=-\frac{(-3\cdot1+0)\cdot2-\left[1+2\cdot(-3)\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot(-3)\right]\cdot(2+0)}{4}=-\frac{-6+22}{4}=\underline{-4}$$

<u>שאלה 2.</u>

2א) (10 נק') נתונה פונקציה גזירה של משתנה אחד $g(u)$. הוכח כי פונקציה $f(x,y)=g\left(\frac{x-y}{xy}\right)$ מקיימת את המשוואה הבאה: $x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g'\left(\frac{x-y}{xy}\right)\cdot\frac{1\cdot xy-(x-y)\cdot y}{(xy)^2}=\frac{1}{x^2}\cdot g'\left(\frac{x-y}{xy}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=g'\left(\frac{x-y}{xy}\right)\cdot\frac{-1\cdot xy-(x-y)\cdot x}{(xy)^2}=-\frac{1}{y^2}\cdot g'\left(\frac{x-y}{xy}\right)$$

לכן

$$x^2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g'\left(\frac{x-y}{xy}\right)-y^2\cdot\frac{1}{y^2}\cdot g'\left(\frac{x-y}{xy}\right)=0$$

2ב) (10 נק') מצא תחום התכנסות של הטור הבא: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$

<u>פתרון:</u> כאן $u_n(x)=\dfrac{(2n-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$. נשתמש במבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)^n\cdot|x+1|^n}{2^{n-1}\cdot n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\,|x+1|}{2\cdot n}=|x+1|$$

אם $|x+1|<1$ הטור מתכנס בהחלט: $\underline{-2<x<0}$.

אם $|x+1|>1$ הטור מתבדר.

נבדוק בקצוות:

(a) $x=0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$

$$a_n=\frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}=2\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=2\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2}}\to 2e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

לכן הטור מתבדר.

(b) $x=-2 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n\cdot(-1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$

$$|a_n|=\frac{(2n-1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}\longrightarrow 2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

לכן הטור מתבדר.

<u>תשובה</u>: <u>תחום ההתכנסות</u> הוא הקטע $(-2,0)$.

<u>שאלה 3.</u> נתון שדה ווקטורי $\vec{F}=\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{-x}{x^2+y^2}\vec{j}$.

3א) חשב את העבודה של שדה $\vec{F}$ לאורך מסלול L כאשר L הוא מעגל $x^2+y^2=4$ נגד כיוון השעון. הסביר מדוע שדה $\vec{F}$ אינו משמר בתחום ההגדרה שלו. (8 נק')

3ב) הוכח כי בתחום $x>0,\ y>0$ השדה הוא שדה משמר ומצא את הפוטנציאל שלו. באיזה תחומים השדה הזה משמר? (8 נק')

3ג) חשב את העבודה של שדה $\vec{F}$ לאורך מסלול L כאשר L הוא חצי מעגל עליון $\left\{(x-3)^2+(y-2)^2=1, y\geq 2\right\}$ מנקודה $A(4,2)$ עד לנקודה $B(2,2)$. (4 נק')

<u>פתרון:</u> (א) נרשום את L בצורה פרמטרית: $\begin{cases} x=2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases},\ \varphi\in[0,2\pi]$ ונחשב את האינטגרל:

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\sin\varphi}{\underbrace{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}_{=4}}\cdot(-2\sin\varphi)+\frac{-2\cos\varphi}{\underbrace{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}_{=4}}\cdot(2\cos\varphi)\right]d\varphi=-\int_0^{2\pi}d\varphi=-2\pi\neq 0$$

השדה $\vec{F}$ אינו משמר בתחום הגדרתו, כי עבודה לאורך מסלול סגור שונה מאפס.

(ב) ברביע הראשון $\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$ מתקיים

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{-(x^2+y^2)+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

והתחום הוא פשוט קשר, לכן $\vec{F}$ משמר. השדה משמר בכל תחום פשוט קשר שלא מכיל $(0,0)$.

נמצא את הפוטנציאל שלו:

$$\begin{cases} u'_x=\frac{y}{x^2+y^2} \\ u'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow \begin{aligned} &u(x,y)=\int\frac{y\,dx}{x^2+y^2}+h(y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+h(y)\\ &u'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+h'(y)=\frac{-x}{x^2+y^2}+h'(y)=-\frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}\Rightarrow h'(y)=0\Rightarrow h=c$$

לכן

$$\underline{u(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+c}$$

(ג)

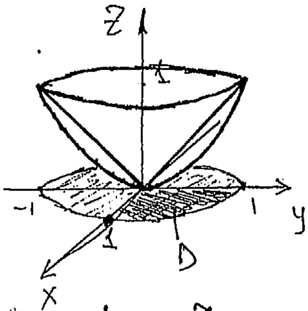
$$\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=u(B)-u(A)=\operatorname{arctg}\frac{2}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4}{2}=\underline{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}2}$$

<u>שאלה 4</u>. חשב מסה של גוף

$$V=\left\{(x,y,z):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

בעל צפיפות $\mu=35yz$.

<u>פתרון:</u> נמצא את החיתוך:



$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=z^2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=0 \\ x_1=y_1=0 \end{cases},\ \begin{cases} z_2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$m=\iiint_{\Omega}\mu\,dv=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}35yz\,dz=$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^{r}35r\cdot\sin\varphi\cdot z\,dz=\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi}_{=1}\int_0^1\frac{r^2}{2}\cdot 35\left(r^2-r^4\right)dr=\frac{35}{2}\left(\frac{r^5}{5}-\frac{r^7}{7}\right)\Big|_0^1=$$

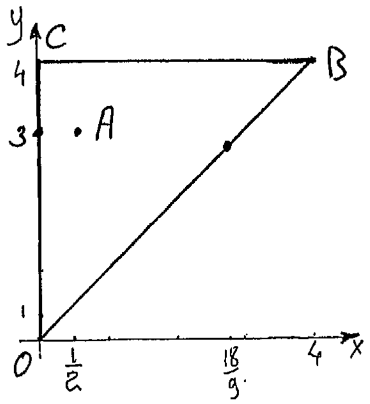
$$=\frac{35}{2}\left(\frac{7-5}{35}\right)=\underline{\underline{1}}\ \blacksquare$$

שאלה 5.

נתונה פונקציה $f(x,y)=x^2+3y^2-x-18y-4$.

א) מצא את כל הנקודות הקיצון של פונקציה f **. (10 נק')**

ב) מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של f **בתחום** $\{(x,y):0\le x\le y\le 4\}$ **. (10 נק')**



פתרון: (א) נמצא את הנקודות הקריטיות של f:

$$\begin{cases} f'_x = 2x-1=0 \\ f'_y = 6y-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=3 \end{cases} \quad A(\tfrac{1}{2},3)$$

$$f(A)=\frac{1}{4}+3\cdot 9-\frac{1}{2}-18\cdot 3-4=\underline{\underline{-31\frac{1}{4}}}$$

$$f''_{xx}(A)=2,\quad f''_{yy}(A)=6,\quad f''_{xy}(A)=0$$

לכן $\Delta=2\cdot 6-0^2=12>0$ ו- $f''_{xx}(A)>0$. מכאן בנקודה A יש מינימום מקומי לפונקציה f

(ב) נחקור את f על השפה של D

(a) $OB:\ x\in[0,4],\ y=x \Rightarrow f=x^2+3x^2-x-18x-4=4x^2-19x-4$

$f'=8x-19=0 \Rightarrow x=y=\frac{19}{8}$

$$f\left(\tfrac{19}{8},\tfrac{19}{8}\right)=4\cdot\frac{361}{64}-19\cdot\frac{19}{8}-4=-\frac{361}{16}-4=\underline{\underline{-26\frac{9}{16}}}$$

$$f(4,4)=f(B)=4\cdot 16-19\cdot 4-4=\underline{\underline{-16}}$$

$$f(O)=f(0,0)=\underline{\underline{-4}}$$

(b) $OC:\ y\in[0,4],\ x=0 \Rightarrow f=3y^2-18y-4 \Rightarrow f'=6y-18=0 \Rightarrow y=3,\ x=0$

$$f(0,3)=3\cdot 9-18\cdot 3-4=\underline{\underline{-31}}$$

$$f(C)=f(0,4)=3\cdot 16-18\cdot 4-4=\underline{\underline{-28}}$$

(c) $CB:\ x\in[0,4],\ y=4 \Rightarrow f=x^2+3\cdot 16-x-18\cdot 4-4=x^2-x-28 \Rightarrow f'=2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\tfrac{1}{2},4\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-28=\underline{\underline{-28\frac{1}{4}}}$$

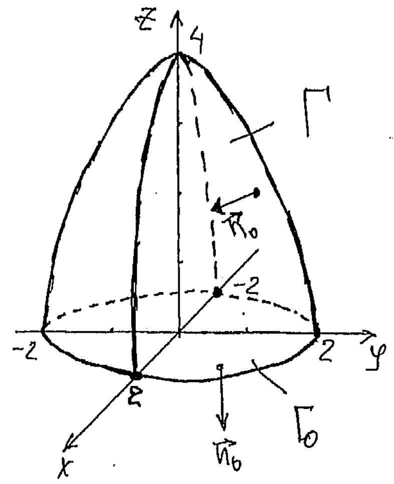
$$f_{max}=f(0,0)=\underline{\underline{-4}},\quad f_{min}=f\left(\tfrac{1}{2},3\right)=\underline{\underline{-31\frac{1}{4}}}$$

<u>שאלה 6.</u> **חשב שטף של שדה ווקטורי**

$$\vec{A}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2,2x\arctan y,\frac{-2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\right)$$

דרך חלק הפרבולואיד $\left\{(x,y,z): z=4-x^2-y^2, z\geq 0\right\}$ **בעל נורמל מכוונת לתוך הפרבולויד .**

רמז: השתמש בנוסחת גאוס.



<u>פתרון:</u> נסגור אות Γ ע"י העיגול Γ_0 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 4 \\ z=0\end{cases}$ ונקבל

$$-\iint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{u}_0\,ds=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\,dv-\iint_{\Gamma_0}\vec{A}\cdot\vec{u}_0\,ds$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}=0$$

לכן $\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\,dv=0$.

נחשב $\iint_{\Gamma_0}\vec{A}\cdot\vec{u}_0\,ds$. כאן $\vec{u}_0=(0,0,-1)$. לכן $(z=0)$

$$\iint_{\Gamma_0}\vec{A}\cdot\vec{u}_0\,ds=\iint_{D}(-1)\,dx\,dy=-4\pi$$

לכן

$$-\iint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{u}_0\,ds=0+4\pi \Rightarrow \iint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{u}_0\,ds=\underline{\underline{-4\pi}}$$