



אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 6.07.2017

שם המרצה: פרופ' ל. פריגוזין

שם הקורס: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה

מספר הקורס: 201.1.9571

שנה 2017 סמסטר ב' מועד א'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (4 עמודים),

מחשבון

יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות

בדפים המיועדים לכך בלבד

לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)

לכל השאלות משכל שווה (25 נקודות)

נבדקות כל 5 השאלות. מתחשבים ב-4 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (7 נק') הראו שפונקציה $f(x, y) = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ מקיימת את המשוואה

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{הבאה:}$$

$$f = \frac{1}{2} \ln [(x-a)^2 + (y-b)^2]$$

$$f'_x = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$f'_y = \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$f''_{xx} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

$$f''_{yy} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0.$$

(ב1) (11 נק') מחפשים את הגליל עם שטח פנים מינימאלי בין הגלילים בעלי נפח V . השתמשו בשיטת כופלי לגרנז' כדי למצוא רדיוס R וגובה H של הגליל.

$$V = \pi R^2 H$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R H$$

$$\begin{cases} \min(2\pi R^2 + 2\pi R H) \\ \pi R^2 H - V = 0 \end{cases}$$

$$g = \pi R^2 H - V = 0 : \text{צ'יט'ק}$$

$$L = 2\pi R(R+H) + \lambda(\pi R^2 H - V)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial R} = 2\pi(2R+H) + \lambda 2\pi R H = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial H} = 2\pi R + \lambda \pi R^2 = 0 \\ \pi R^2 H - V = 0 \end{cases}$$

$$2R + H + \lambda R H = 0$$

$$R(2 + \lambda R) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{R}$$

$$2R + H - \frac{2}{R} R H = 0$$

$$2R - H = 0 \Rightarrow H = 2R$$

$$\pi R^2 H = 2\pi R^3 = V$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$H = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

(ג1) (7 נק') האם טור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n-1}$ מתכנס? הסבירו.

אנחנו ח'וב' לשמש נמבחן קוש' :

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n}}{\sqrt[n]{\frac{n+2}{3n-1}}} = \frac{\frac{n+2}{3n-1}}{\sqrt[n]{\frac{n+2}{3n-1}}}$$

$$\frac{n+2}{3n-1} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \frac{1}{3}, \quad \sqrt[n]{\frac{n+2}{3n-1}} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 1$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{SIC}$$

סלכס

שאלה מס' 2. חשבו שטף השדה $\vec{F} = x^3 z \vec{i} + y^3 z \vec{j} - \frac{3}{2} z^2 \vec{k}$, $Q = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

דרך שפה S של גוף $V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1, x \geq 0\}$

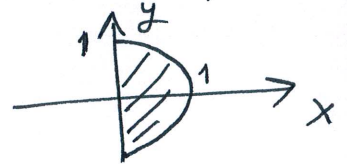
(\vec{n} - נורמל חיצוני). S נכנס מלמעלה ומלמטה ונפתח בצדדים.

$$Q = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 z + 3y^2 z - 3z = 3z(x^2 + y^2 - 1)$$

הקיבוצים נכנסים כדלהלן:

$$V = \left\{ (r, \varphi, z) \mid \begin{array}{l} z \leq z \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$



$$Q = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 z dz \int_z^1 (z^2 - 1) z dz =$$

$$= 3\pi \int_0^1 z(z^2 - 1) \frac{z^2}{2} \Big|_{z=z}^1 dz = \frac{3\pi}{2} \int_0^1 z(z^2 - 1)(1 - z^2) dz =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \int_0^1 (-z^5 + 2z^3 - z) dz = \frac{3\pi}{2} \left[-\frac{1}{6} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{\pi}{4}$$

שאלה מס' 3

(א3) (13 נק') מצאו משוואת המישור S המכיל את הישר L ומאונך למישור $P: x-2y+z+5=0$.

$$L: \begin{cases} x+y+3z-3=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

$$P: x-2y+z+5=0$$

$$x=2z$$

$$0 = x+y+3z-3 = 2z+y+3z-3 \Rightarrow y = 3-5z$$

מטאנו קטנות של L :

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{1}$$

נקודת כיון של L : $\vec{l} = (2, -5, 1)$; נקודת L $M_0(0, 3, 0)$.

נורמל של מישור P : $\vec{N}^P = (1, -2, 1)$.

מישור S מכיל את הישר L ומאונך למישור P . נורמל \vec{N}^S של S הוא מכון $\vec{l} \times \vec{N}^P$.

$$\vec{N}^S = \vec{l} \times \vec{N}^P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

מעטת מישור S :

$$\vec{N}^S \cdot \overline{MM_0} = 0$$

$$-3(x-0) - 1(y-3) + 1(z-0) = 0$$

$$\underline{3x + y - z - 3 = 0}$$

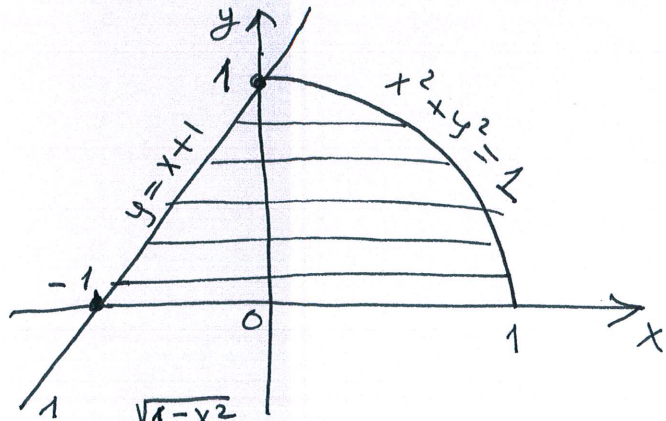
||C

$$I = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f dx$$

3ב) (12 נק') החליפו סדר האינטגרציה באינטגרל

$$x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$x = y - 1 \Rightarrow y = x + 1$$



$$I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy$$

שאלה מס' 4. מצאו כל נקודות קיצון מקומי של פונקציה $f = -x^2y^2 + x^6 + y^6$.

נקודות חשבוניות: $x=0, y=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy^2 + 6x^5 = 0 \Rightarrow x(y^2 - 3x^4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 6y^5 = 0 \Rightarrow y(x^2 - 3y^4) = 0$$

1) $x=0 \Rightarrow y=0$
 $y=0 \Rightarrow x=0$

$M_0(0,0)$

2) $x \neq 0, y \neq 0$:

$$\begin{aligned} y^2 = 3x^4 &\Rightarrow x^2 = 3(3x^4)^2 = 27x^8 \Rightarrow x^6 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x^2 = 3y^4 &\Rightarrow y^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4 נקודות חשבוניות: M_1, M_2, M_3, M_4

$M_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), M_2(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), M_3(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), M_4(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

$f''_{xx} = -2y^2 + 30x^4$ $f''_{yy} = -2x^2 + 30y^4$ $f''_{xy} = -4xy$
 : M_1, \dots, M_4 נקודות חשבוניות (כ)

$f''_{xx} = -\frac{2}{3} + \frac{30}{9} = \frac{8}{3}$, $f''_{yy} = \frac{8}{3}$, $f''_{xy} = \pm \frac{4}{3}$

$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (\frac{8}{3})^2 - (\frac{4}{3})^2 > 0$, $f''_{xx} > 0 \Rightarrow \min$ נקודות חשבוניות

f יש נקודות \min נקודות חשבוניות M_1, M_2, M_3, M_4 נקודות חשבוניות
 : M_0 נקודת חשבונית (ג)

$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = 0$

$\Delta = 0$

נקודת התנהלות של f בסביבת $M_0(0,0)$

$f(0,\epsilon) = \epsilon^6 > 0$ אם $x=0, y=\epsilon$ מקבלים $0 = f(0,0)$
 אם $x=y=\epsilon$ מקבלים $f(\epsilon,\epsilon) = \epsilon^4(2\epsilon^2 - 1) < 0$ נראה

יש סביבה קטנה סביב M_0 יש נקודות חשבוניות עם ערך f חיובי ויש נקודות חשבוניות עם ערך f שלילי.
 נקודת חשבונית M_0 איננה נקודת חשבונית קיצונית.

שאלה מס' 5. מצאו עבור איזה ערך של קבוע C שדה ווקטורי

$$\vec{F} = (Cxy + z^2)\vec{i} + (Cyz + x^2)\vec{j} + (Cxz + y^2)\vec{k}$$

הוא שדה משמר. חשבו, עבור ערך זה של C , את האינטגרל $A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$ כאשר L הוא

$$\left\{ x = t^{10} + 2t^5, y = 3 \cos(\pi t) + 2, z = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 1, 0 \leq t \leq 1 \right\} \text{ מסלול}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Cxy + z^2 & Cyz + x^2 & Cxz + y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(2y - Cy) - \vec{j}(Cz - 2z) + \vec{k}(2x - Cx)$$

כאשר $C=2$ שדה \vec{F} הוא שדה משמר ב- R^3 ו' $\text{rot } \vec{F} = 0$
פונקציה פוטנציאלית:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2 \Rightarrow f = x^2y + z^2x + h(y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial h}{\partial y} = 2yz + x^2 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = 2yz, \quad h = y^2z + g(z)$$

$$f = x^2y + z^2x + y^2z + g(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx + y^2 + \frac{dg}{dz} = 2xz + y^2 \Rightarrow \frac{dg}{dz} = 0, \quad g = 0.$$

$$f = x^2y + z^2x + y^2z$$

אינטגרל $A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$ הוא הפער בין ערכי הפונקציה הפוטנציאלית,

$$A = f(M_1) - f(M_0)$$

$$t=0: M_0(0, 5, -1)$$

$$t=1: M_1(3, -1, 0)$$

$$f(M_0) = -25$$

$$f(M_1) = -9$$

$$A = -9 + 25 = \underline{\underline{16}}$$