



אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מזרר בחינות

תאריך המבחן 10.07.2016
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: תדו'א 2 לביוטכנולוגיה
מס' הקורס: 201.1.9571
מועד א'
משך המבחן- 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות A4 (משגי צדדים),
מחשבון.

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).
כל שאלה שווה ל- 20 נקודות.
הציון יחושב על סמך 5 השאלות הטובות ביותר ואין צורך לציין איזה שאלות לבדוק.
כל התשובות תהיינה מנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1.

א1 (10 נק') נתונה פונקציה $w(x, y) = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. חשבו $F = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

$$w = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + (y-b)^2)$$

$$w'_x = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$w'_y = \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$w''_{xx} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

$$w''_{yy} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

$$F = w''_{xx} + w''_{yy} = \underline{\underline{0}}$$

10) מצאו נקודות קיצון של פונקציה $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ (10 נק')

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y(y-2) = 0 \end{cases}$$

נקודות קיצון: $(0,0), (-2,0), (0,2), (-2,2)$

$$M_1(0,0), \quad M_2(-2,0), \quad M_3(0,2), \quad M_4(-2,2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{vmatrix} = 36(x+1)(y-1)$$

$$M_1: \Delta = -36 < 0 \Rightarrow \text{נק' קיצון}$$

$$M_2: \Delta = 36 > 0, f''_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow \text{נק' max}$$

$$M_3: \Delta = 36 > 0, f''_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow \text{נק' min}$$

$$M_4: \Delta = -36 < 0 \Rightarrow \text{נק' קיצון}$$

תוצאה: נקודות קיצון:

$$\max - M_2(-2,0)$$

$$\min - M_3(0,2)$$

שאלה מס' 2.

(א2) (10 נק') מצאו משוואת המישור העובר דרך הישר $\begin{cases} 3x-2y+z-3=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ (הישר כולו)

מונח במישור המבוקש) ומאונך למישור $x-2y+z+5=0$.

"כיוון פרמטר של הישר:

$z = t$
 $x = 2t$

$6t - 2y + t - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{2}t - \frac{3}{2}$

נקטו ל"ט ונקודתו של הישר:

$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $M(0, -\frac{3}{2}, 0)$

נורמל של מישור נתון:
נורמל של מישור המבוקש צריך להיות מאונך ל- $\vec{\ell}$ ול- \vec{N} :

$\vec{N}_1 = \vec{\ell} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \frac{11}{2} - \vec{j} 1 + \vec{k} \frac{15}{2}$

או $\vec{N}_1 = (11, -2, -15)$

(נח'סור כולם נק' מ. אס נמשוואה הי'א:

$\vec{N}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_M) = 0$

~~11x - 2(y + \frac{3}{2}) - 15z = 0~~ ^{11x}

11x - 2y - 15z - 3 = 0 : גאורגיה

שאלה מס' 3.

א3 (6 נק') תהי פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

הסבירו מדוע בנקודה זו $\text{grad} f$ מאונך למשטח רמה $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

כאשר f צ'פונצ'אל'ת $M(x_0, y_0, z_0)$ הנקודה 15
ק"ח מ'שור מט'ק למ'טח M

$$f(x, y, z) = f(M).$$

ומ'טח'ו של המ'שור ה'א

$$f'_x(M)(x-x_0) + f'_y(M)(y-y_0) + f'_z(M)(z-z_0) = 0$$

נורמל למ'שור הוא \vec{N} נורמל למ'טח:

$$\vec{N} = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)) = \text{grad} f(M)$$

$\sqrt{e_n}$

שאלה מס' 4. השתמשו בשיטת כופלי לגרנז' כדי למצוא את הנקודה (או נקודות) מהמשטח

$$z=0 \quad 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$$

$$f = z^2$$

$$g = 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$$

$$\begin{cases} \max z^2 \\ 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + \lambda g'_x = 0 \\ 0 + \lambda g'_y = 0 \\ 2z + \lambda g'_z = 0 \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(4x + 2z) = 0 \\ \lambda 6y = 0 \\ 2z + \lambda(4z + 2x) = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

1. $\lambda = 0 \Rightarrow z = 0$ ← *מינימום*

2. $\lambda \neq 0 \Rightarrow y = 0, z = -2x.$

$$g = 0 \rightarrow 2x^2 + 3 \cdot 0 + 8x^2 - 4x^2 = 6$$

$$6x^2 = 6$$

$$x = \pm 1.$$

$$z = \mp 2$$

לפיכך: הנקודות הנחשבות הן $z=0$

כי: $(1, 0, -2), (-1, 0, 2).$

שאלה מס' 5. מצאו שטף השדה $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$ דרך שפה של תחום

$$D: \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

בכיוון נורמל חיובי.

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 1 + 2z = 1 + 2z$$

$$\iiint_D (1 + 2z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 2\pi \int_0^1 z \, dz \int_{z^2}^{2-z} (1 + 2z) \, dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 z (z + z^2) \Big|_{z=z^2}^{2-z} dz = 2\pi \int_0^1 z(2-z + (2-z)^2 - z^2 - z^4) dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 z(6 - 5z - z^4) dz = 2\pi \left(3 - \frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{7\pi}{3}}}$$

שאלה מס' 6.

(א) (10 נק') האם הטור הבא מתכנס? הסבירו.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 + 3n + 2)e^n}{2^n + 3^n}$$

מבחן Cauchy:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{e}{3} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 3n + 2}{1 + (\frac{2}{3})^n}} = \frac{e}{3} \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} (\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{1 + (\frac{2}{3})^n}}$$

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \sqrt[n]{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \sqrt[n]{1 + (\frac{2}{3})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{e}{3} < 1$$

OK

מתכנס

(ב) (10 נק') מצאו תחום התכנסות של טור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{3^n (n+1000)} (x-2)^n$$

האם בקצוות התחום הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

לפי קריטריון

$$t = x - 2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{1/3} \cdot (n+1000)}{n^{1/3} \cdot (n+1001) \cdot 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

$$R = 3 - 0 = 3$$

לפי

$$t = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n+1000}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \right)$$

לפי קריטריון (השוואה עם איברי)

$$t = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3} (-1)^n}{n+1000}$$

$$b_n = \frac{n^{1/3}}{n+1000}$$

לפי קריטריון Leibnitz

$$1) \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2) \quad \frac{db_n}{dn} = \frac{\frac{1}{3} n^{-2/3} (n+1000) - n^{1/3}}{(n+1000)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1000}{3n^{2/3}} - \frac{2}{3} n^{1/3}}{(n+1000)^2} < 0$$

כאשר n מספיק גדול, לפי קריטריון n שזכרנו

$$b_n > b_{n+1} > \dots$$

עם מנאי "ג'ג" איור מתכנס (בתנאי)

$$-1 \leq x < 5 \quad \leftarrow -3 \leq t < 3$$

(נק' $x = -1$ מתכנס בתנאי)