



אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 14.07.2015

שם המרצה: פרופ' ל. פריגוזין

שם הקורס: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה

מספר הקורס: 201.1.9571

שנה: 2015 סמסטר ב' מועד א'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (4 עמודים),

מחשבון פשוט

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות

בדפים המיועדים לכך בלבד

לטייטה השתמשו בדפי טייטה (מיועדים לגריסה)

לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)

נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

(81) (10 נק') פונקציה $f(x, y, z, w) = \left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x, y, z, w$.

הוכיחו כי $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + w \frac{\partial f}{\partial w} = 0$ (שווה לקבוע (ומצאו את הקבוע הזה).

$$f = e^{\frac{z}{w}(\ln x - \ln y)} = e^\varphi$$

$$f'_x = e^\varphi \cdot \frac{z}{wx}$$

$$f'_y = e^\varphi \left(-\frac{z}{wy}\right)$$

$$f'_z = e^\varphi \cdot \frac{\ln x - \ln y}{w}$$

$$f'_w = e^\varphi \cdot \frac{(\ln x - \ln y)z}{-w^2}$$

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z + w f'_w = 0$$

S/C

10 בק' (ב) הסבירו מדוע בסביבת $x=1$ קיימת פונקציה $y(x)$ המקיימת משוואה

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$$

ותנאי $y(1)=0$. מצאו $y'(1), y''(1)$.

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = 0$$

1. נק' $(1, 0)$ נק' נ"מ נ"מ א"א .

$$F'_y = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow F'(1, 0) = -1 \neq 0$$

2. slc נ"מ נ"מ א"א . $y=y(x)$.

$$y'_x = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (y/x)^2}}{\frac{y - x}{x^2 + y^2}} = \frac{x + y}{x - y}$$

$$y''_{xx} = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{-2y + 2xy'}{(x - y)^2}$$

$$y'(1) = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1, \quad y''(1) = \frac{0 + 2 \cdot 1}{1} = 2.$$

שאלה מס' 2.

(א2) (10 נק') מצאו נפח של הגוף הבא: $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq x + y\}$

ה'טו' סוף חצי' ו'טו' xy :

$$x^2 + y^2 \leq x + y$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{1K}$$

$$D = \{(x, y, z) \mid \begin{array}{l} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 \leq z \leq x + y \end{array}\}$$

$$V = \iint (x + y - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$\{(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi \\ y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$y = z$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{1}{2} - r^2) r dr = 2\pi \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2\pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

מצאו שתף הסדה, $\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, דרך ספה S של תחום D מסעיף $\vec{n}$ נורמל (חיצוני).

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3 - 3 + 2 = 2$$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 2 \iiint_V 1 \, dV =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

שאלה מס' 3. נתונים שני ישרים:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 9 = 0 \\ 2x + y - z - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z + 5 = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

מה מצב הדדי של הישרים (מצטלבים, נחתכים או מקבילים)?
אם הישרים נחתכים מצאו את הנקדת החיתוך, ואם לא חשבו את המרחק בין הישרים.

$$\begin{aligned} x &= t \\ \begin{cases} -2y + z = -9 - t \\ y - z = 10 - 2t \end{cases} \\ y &= 3t - 1 \\ z &= 5t - 11 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+11}{5}$$

$$M_1(0, -1, -11)$$

$$\vec{\ell}_1 = (1, 3, 5)$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5/2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 5/2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

ה'טלם נחלף. נקודת חיתוך:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{y-4}{-2} \Rightarrow y = 2$$

$$x = \frac{y+1}{3} = 1$$

$$\frac{x}{1} = \frac{z+11}{5} = \frac{2z+17}{5} \Rightarrow z = -6$$

ואז נק' חיתוך

$$\underline{\underline{(1, 2, -6)}}$$

שאלה מס' 4.

(א4) (10 נק') נתון אליפטואיד

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

בין כל התיבות $\{ |x| \leq k_x, |y| \leq k_y, |z| \leq k_z \}$ החסומות באליפטואיד זה מצאו את התיבה

בעלת נפח מקסימאלי.

קורקו'ם של ג'בו מקס'מא'ל' ל נא'מ'ם ע'ס הא'ס' 1900'3
ז'ל'ק ע'סא'ל

$$\begin{cases} \max \delta xyz \\ \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1}_{g(x,y,z)} = 0 \end{cases}$$

נא'מ'ם ע'סא'ל : 1900'3

$$\delta yz + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0$$

$$\delta xz + 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0$$

$$\delta xy + 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0$$

$$1) \lambda = 0 \Rightarrow yz = xz = xy = 0 \Rightarrow V = \delta xyz = 0$$

נא'מ'ם ע'סא'ל

$$2) \lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

נא'מ'ם ע'סא'ל

(ע'סא'ל : $g=0, \nabla g=0$ / פ'רמ'ן)

(ב) (10 נק') מצאו כל נקודות קיצון מקומי של פונקציה
 $f = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y &= 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$$4x^3 - 4x = 0 \quad x(x^2 - 1) = 0$$

/13171 /13171 /13171
 /13171 /13171 /13171

$$M_1(1, 1), \quad M_2(-1, -1), \quad M_3(0, 0)$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f''_{xy} = -2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{vmatrix} = 4[(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 1]$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta(M_1) = \Delta(M_2) &> 0 \\ f''_{xx}(M_1) = f''_{xx}(M_2) &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{נקודות קיצון מקומי} - M_1, M_2$$

$$\Delta(M_3) = 0 \Rightarrow \text{נקודת קיצון מקומי}$$

$$f = x^4 + y^4 - (x+y)^2, \quad f(0,0) = f(M_3) = 0$$

$$1) \quad x+y=0 \Rightarrow f > 0 \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$2) \quad x=y=\varepsilon \ll 1 \\ f = 2\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 = 2\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1) < 0$$

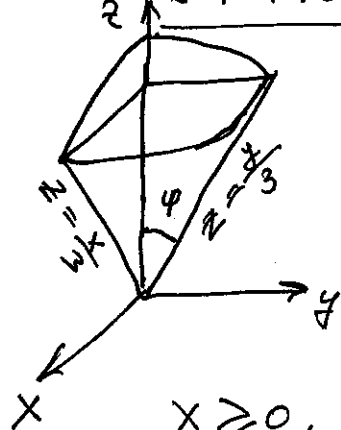
לכן $f > 0$ עבור נקודות M_1, M_2 שהם נקודות קיצון מקומי.
 עבור M_3 אנו רואים נקודת קיצון מקומי $f < 0$ אם

שאלה מס' 5. חשבו מסה של גוף

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ x^2 + y^2 \leq 9z^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}$$

בעל צפיפות $d = 10z$. סגור: 2 ו-1/2

$$\rho = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 3 \quad \text{סגור: 1/2}$$



$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$$J = r^2 \sin \varphi$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \varphi \leq \arctan 3 \\ 0 &\leq r \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\arctan 3} d\varphi \int_0^2 \underbrace{r \cos \varphi}_z \cdot \underbrace{r^2 \sin \varphi}_J dr = \\ &= 10 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \cdot \int_0^{\arctan 3} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi = -5\pi \cos 2\varphi \Big|_0^{\arctan 3} = \end{aligned}$$

$$= 5\pi (1 - \cos(2\arctan 3)) = \int \cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Big|_0^3 =$$

$$= 5\pi \left(1 - \frac{1-3^2}{1+3^2}\right) = \underline{\underline{9\pi}}$$

שאלה מס' 6.

(א6) (10 נק') מצאו קטע התכנסות של טור חזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2 - n}} (x-1)^n$$

וחקרו התכנסות הטור בקצוות הקטע.

$$t = x - 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\sqrt{2n^2 - n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{\sqrt{2(n+1)^2 - (n+1)}} = \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 \Rightarrow \underline{R = 1}$$

$$b_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2 - n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2 - n}} \quad (t=1) \quad \text{קריטריון ד'אלברט}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2 - n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כל סדרות $\sum b_n$ מתכנסת $\Leftarrow \sum a_n$ מתכנסת.

$$\text{האור דא מתכנס בקטע } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2 - n}} \quad (t = -1)$$

כל מתכנסת. מקצוות

$$\left\{ a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n-1)n}} \right\}$$

יורדים מונוטונית ושואפים לאפס.
 כל מתכנס (גלגל) ד'אלברט.
 $-1 \leq t < 1$

$$-1 \leq x - 1 < 1$$

לסופה!
 $x = 0$ (גלגל) $0 \leq x < 2$
 (גלגל)

(ב) (10 נק') האם שדה $\vec{F} = \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\vec{i} + \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\vec{j}$ הוא שדה משמר בכל

תחום $D \subset \mathbb{R}^2$? הסבירו וחשבו עבודה של שדה $\vec{F}$ לאורך מסלול סגור $x^2 + y^2 = R^2$ נגד כיוון השעון.

$$M = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad N = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

נראה כי $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ לכל $(x, y) \neq (0, 0)$.
 נראה משהו נוסף: נחום סטוק קטר שדה $(0, 0)$ כולל.
 גודל שדה $x^2 + y^2 \leq R^2$ כולל $(0, 0)$ שגורם להשבר
 את ניסוחה באופן 'ע'ר:

$$\begin{aligned} L: \quad x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \\ 0 &\leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_L M dx + N dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[R \sin t - \frac{R \sin t}{R^2} \right] (-R \sin t) + \left[R \cos t + \frac{R \cos t}{R^2} \right] (R \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t] dt =$$

$$= -R^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt + 2\pi = \underline{\underline{2\pi}}$$