



אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה 18.05.17

מרצה: פרופ' ל. פריגוזין

בוחן ב: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה

מס' הקורס 0201.1.9571

סמ' ב

משך הבוחן- 2 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים), מחשב כיס.

יש לפתור כל השאלות הבאות

בדפים המיועדים לכך בלבד

לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)

בהצלחה!

שאלה מס' 1

(א1) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + z^2 - \ln\left\{\frac{xy}{4z}\right\} - \frac{3}{2} = 0$$

בנקודה $M_0(1,4,1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{\frac{xy}{4z}} \cdot \frac{y}{4z} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{1}{\frac{xy}{4z}} \cdot \frac{x}{4z} = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \frac{1}{\frac{xy}{4z}} \cdot \frac{xy}{4z^2} = 2z + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 2 + 1 = 3$$

:p'en r'e'n

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z-z_0) = 0$$

$$-\frac{3}{4}(x-1) - \frac{5}{16}(y-4) + 3(z-1) = 0$$

1c

$$12x + 5y - 48z + 16 = 0$$

(ב) (10 נק') מצאו היטל של נקודה $M_1(1, -1, 2)$ על המישור זה וגם מרחק מהנקודה למישור.

יש מאונך למישור העובר דרך נקודה M_1 :

$$\begin{cases} x = 1 + 12t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2 - 48t \end{cases}$$

נמצא נקודת חיתוך בין המישור לנקודה:

$$12(1+12t) + 5(-1+5t) - 48(2-48t) + 16 = 0$$

$$12 + 144t - 5 + 25t - 96 + 48^2 t + 16 = 0$$

$$t(144 + 25 + 48^2) = -12 + 5 + 96 - 16$$

$$2,473t = 73$$

$$t = 0.0295$$

נקודת היטל:

$$\begin{cases} x = 1 + 12 \cdot 0.03 = 1.36 \\ y = -1 + 5 \cdot 0.03 = -0.85 \\ z = 2 - 48 \cdot 0.03 = 0.56 \end{cases}$$

המרחק מנקודה M_1 למישור:

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 48 \cdot 2 + 16|}{\sqrt{12^2 + 5^2 + (-48)^2}}$$

$$= 1.47$$

שאלה מס' 2 (25 נק') נתון כי פונקציה $f(u, v)$ מקיימת משוואה $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$. הוכיחו

שפונקציה מורכבת $w(x, y) = f\left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy\right)$ גם מקיימת את המשוואה, כלומר

$$u = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

$$v = xy$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$w'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = x f'_u + y f'_v$$

$$w'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -y f'_u + x f'_v$$

$$f'_u = f'_u\left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy\right), \quad f'_v = f'_v\left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy\right) \quad |^{(c)}$$

$$w''_{xx} = \underbrace{f'_u + f''_{uu} \cdot x^2 + f''_{uv} xy}_{(x f'_u)'} + \underbrace{f''_{uv} \cdot xy + f''_{vv} y^2}_{(y f'_v)'} =$$

$$= f'_u + f''_{uu} \cdot x^2 + 2 f''_{uv} xy + f''_{vv} y^2$$

$$w''_{yy} = \underbrace{-f'_u + f''_{uu} y^2 - f''_{uv} xy}_{(-y f'_u)'} + \underbrace{-f''_{uv} xy + f''_{vv} x^2}_{(x f'_v)'} =$$

$$= -f'_u + f''_{uu} \cdot y^2 - 2 f''_{uv} xy + f''_{vv} x^2$$

$$w''_{xx} + w''_{yy} = f''_{uu} (x^2 + y^2) + f''_{vv} (y^2 + x^2) =$$

$$= \underbrace{(f''_{uu} + f''_{vv})}_{=0} (x^2 + y^2) = 0$$

(x_0, y_0) אם היא מוגדרת בסביבת נקודה זו ו f סד

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$\therefore \text{KOH} + \text{H}_2\text{SO}_4$

$$\Delta f = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

-1 0'8'27 - A, B 10/100

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}]{} 0$$

$$\beta(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}]{} 0$$

3ב) (15 נק') נתונה פונקציה $f(x, y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$. חשבו $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

האם פונקציה f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$? הסבירו!
ניסחו תנאי מספיק לדיפרנציאביליות של פונקציה רבות משתנים.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

$(0,0) \rightarrow \sqrt{18} \approx 4.24$ f n k s k

$$\Delta f = \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

$$\Delta f = \sqrt[3]{\Delta x(\Delta x + \Delta x)\Delta x} = \sqrt[3]{2} \cdot \Delta x \quad : \Delta y = \Delta x \text{ on } \gamma_j$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \Delta x = (\alpha + \beta) \cdot \Delta x$$

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta$$

$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ $V_2 = 2 + \beta$

המשפט: f היא פונקציה רציפה וחסומה על קטע סגור $[a, b]$.
 אז f מקבלת את ערכיה המקסימלי והמינימלי על $[a, b]$.
 נקרא (x_0, y_0) ו (x_1, y_1) נקודות על $[a, b]$ כך ש $f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ ו $f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$.

שאלה מס' 4 (25 נק') מצאו מינימום מקומי, מקסימום מקומי ונקודות אוכף של פונקציה

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

$$f'_x = 3x^2 + 6x$$

$$f'_y = 3y^2 - 6y$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(x+2) = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$M_1(0, 0), M_2(0, 2), M_3(-2, 0), M_4(-2, 2)$$

$$f''_{xx} = 6x + 6$$

$$f''_{yy} = 6y - 6$$

$$f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{vmatrix} = 36(x+1)(y-1)$$

$$\Delta(M_1) = -36 < 0,$$

$$\Delta(M_2) = 36 > 0,$$

$$\Delta(M_3) = 36 > 0,$$

$$\Delta(M_4) = -36 < 0$$

נקודת מינימום - M_1

$$f''_{xx}(M_2) > 0 \Rightarrow \text{נקודת מקסימום} - M_2$$

$$f''_{xx}(M_3) < 0 \Rightarrow \text{נקודת מינימום} - M_3$$

נקודת אוכף - M_4