



אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 29.06.14

שם המרצה: פרופ' ל. ברזנסקי

שם הקורס: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה

מס' הקורס: 201-1-977

מיועד לתלמידי:

שנה: 2014 סמסטר: ב מועד א

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: שני דפי נוסחאות (דו-צדדיים), מחשבון

מס' נבחן: 40/2

יש להשיב על 5 בדיוק מתוך 6 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (20 נקודות). נמקו את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדויק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

בהצלחה !!

1. נתונה נקודה $A(1, -1, 2)$ וישר $L: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$

- (א) מצא משואה קנונית של הישר L
(ב) מצא מישור P העובר דרך A ומאונך ל L
(ג) מצא נקודה B הסימטרי ל A לגבי ישר L

2. (א) נתונה פונקציה $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. מצא נגזרת מכוונת בנקודה $A(1, 1, 1)$ בכיוון הגרדיאנט בנקודה A

(ב) מצא תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+100)2^n} x^n$

3. (א) מצא בקירוב $\ln 1.5$ עם שגיאה לא גדולה מ 10^{-2}
(ב) נתונה פונקציה

$$z = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) האם פונקציה רציפה?

(2) אם כן האם היא דיפרנציאבילית?

4. (א) חשב $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ כאשר $\vec{F} = yi - xj$ ו $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x + 2y + z = 6 \end{cases}$

(ב) החליף סדר אינטגרציה $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$

5. מצא נקודות אקסטרמום מקומי של $u = x^2 + y^2 + z^2$ תחת האילוץ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

6. חשב $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ כאשר $\vec{F} = zi$, S - שפה של תחום T החסום ע"י משתחים $y = 3 - x^2 - z^2, y = 2$

(א) ע"י נוסחה גאוס

(ב) בדרך ישירה

$$\frac{29.06.14}{1.15ke}$$

$$z=0, \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=3 \end{cases} \quad M_1(1,2,0)$$

$$x=0, \begin{cases} -y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad M_2(0,1,1)$$

$$L: \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1} = t \end{cases}$$

$$\vec{n} = \vec{r} \Rightarrow 1(x-1) + 1(y+1) + (-1)(z-2) = 0$$

$$x+y-z+2=0$$

$$A = L \cap P: \begin{cases} x=t+1, y=t+2, z=-t \\ t+1+t+2+t+2=0, t=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$A(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x_B}{2} &= -\frac{2}{3}, x_B = -\frac{7}{3}; -1 + \frac{y_B}{2} = \frac{1}{3}, y_B = \frac{5}{3} \\ 2 + \frac{z_B}{2} &= \frac{5}{3}, z_B = \frac{4}{3}, B(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}) \end{aligned}$$

$$D u|_{M_0} = |\text{grad } u|_{M_0}$$

$$\text{grad } u = u'_x i + u'_y j + u'_z k =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2+z^2} i + \frac{y}{x^2+y^2+z^2} j + \frac{z}{x^2+y^2+z^2} k$$

$$\text{grad } u|_{M_0} = \frac{1}{3} i + \frac{1}{3} j + \frac{1}{3} k, |\text{grad } u|_{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (n+100) 2^{4n}}{(n+100) 2^4 \sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{n+100}{n+100} \cdot 2 = 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$x=2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+100} \right) = G_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 64$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{64} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1 \Rightarrow$$

$x = -2$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \rightarrow$ (delta) 2 7 2 2 d N

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ $\frac{1}{2} \cdot 2'' 8 / 4 2 N$ p'enden

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n(1+\frac{100}{n})} = 0$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+100) - \sqrt{x}}{(x+100)^2} =$

$= \frac{x+100 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+100)^2} = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)} < 0 \quad (x > 100)$

δ 132 u 5 d 3 7 11 d' / 10 15 in $\angle 4 4 \gamma$ d' 3 6 se

$-2 \leq x < 2$ $\frac{1}{e} \cdot 2$ 0 7 d N 7 0 / 15

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad |x| < 1$

$\ln(1+0.5) = 0.5 - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{4} + \frac{(0.5)^5}{5} - \dots$

$\ln(1+0.5) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0.40$ (1) (2)

$0 < \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2} = x^2+y^2 \rightarrow 0$

$\Delta z = z'_x|_{x_0} \Delta x + z'_y|_{y_0} \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (2)

$\Delta z = z(x, y) - z(x_0, y_0) = z(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

$\Delta x = x - x_0 = x, \quad \Delta y = y - y_0 = y$

$z'_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(x, 0) - z(0, 0)}{x} = 0, \quad z'_y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{z(0, y) - z(0, 0)}{y} = 0$

$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \varepsilon \sqrt{x^2+y^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = ?$

$0 < \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} < \frac{x^4}{|x|^3} + \frac{y^4}{|y|^3} = |x| + |y| \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$

$$x^2 + y^2 = 6 - 2x - 2y, \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 8$$

$$x+1 = \sqrt{8} \cos t, \quad y+1 = \sqrt{8} \sin t$$

$$x = \sqrt{8} \cos t - 1, \quad y = \sqrt{8} \sin t - 1, \quad z = -2\sqrt{8} \cos t - 2\sqrt{8} \sin t + 10$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\rho x' + Q y' + R z') dt =$$

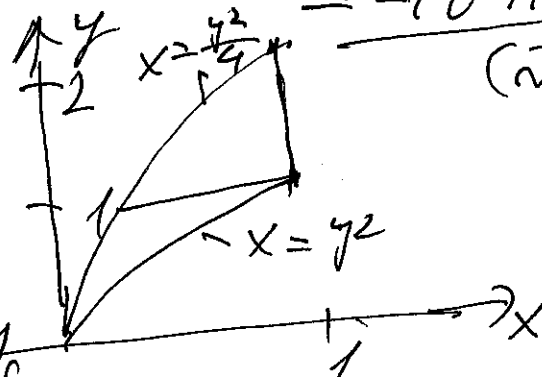
$$= \int_0^{2\pi} [(\sqrt{8} \sin t - 1)(-\sqrt{8} \sin t) + (1 - \sqrt{8} \cos t)(\sqrt{8} \cos t)] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8 \sin^2 t + \sqrt{8} \sin t + \sqrt{8} \cos t - 8 \cos^2 t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{8} \sin t + \sqrt{8} \cos t - 8) dt = (-\sqrt{8} \cos t + \sqrt{8} \sin t - 8t) \Big|_0^{2\pi} = -16\pi$$

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} z dx$$

$$D = \{ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \}$$



$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2/4}^{y^2} z dx + \int_1^2 dy \int_{y^2/4}^{y^2} z dx$$

$$\vec{F} = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$F'_x = 2x + \frac{\lambda}{x^2}, \quad F'_y = 2y + \frac{\lambda}{y^2}, \quad F'_z = 2z + \frac{\lambda}{z^2}$$

$$\lambda = -2x^3 = -2y^3 = -2z^3 \Rightarrow x = y = z$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \quad x = y = z = 1, \quad \lambda = -2$$

$$F''_{xx} = 2 - \frac{2\lambda}{x^3} \Big|_{x=1} = 6, \quad F''_{xz} = F''_{zx} = 0$$

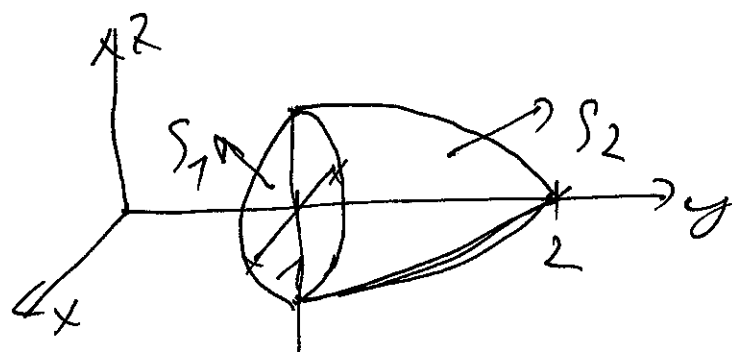
$$F''_{yz} = 0, \quad F''_{yy} = 2 - \frac{2\lambda}{y^3} \Big|_{y=1} = 6, \quad F''_{yz} = 0$$

$$F''_{zx} = 0, \quad F''_{zy} = 0, \quad F''_{zz} = 2 - \frac{2\lambda}{z^3} \Big|_{z=1} = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$$

$$M_0(1, 1, 1) \subseteq$$

6.18ke



$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 = \iiint_T \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iiint_T 0 dx dy dz = 0$$

$$\text{div } \vec{F} = 0 \quad P'_x + Q'_y + R'_z = 0$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$$

$$1) \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{D \times T} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \cdot \frac{1}{\cos \beta} dx dz$$

$$\vec{n}^0 = -\vec{j} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n}^0 = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS = 0$$

$$2) \vec{n}^0 = \pm \frac{\text{grad } g}{|\text{grad } g|}, \quad g = x^2 + z^2 + y - 2$$

$$\vec{n}^0 = \frac{2x\vec{i} + \vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}, \quad \cos \beta > 0$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}, \quad \vec{F} \cdot \vec{n}^0 = \frac{2xz}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_{D \times T} 2xz dx dz, \quad x = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot r dr = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{8} (1 - 1) = 0 \Rightarrow \iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0 + 0 = 0$$