

דוגמא 1: הוכח כי לא קיים גבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

פתרון: כדי להוכיח שגבול של פונקציה לא קיים מספיק למצוא שתי סדרות של הנקודות $\{P_n\}$ ו- $\{Q_n\}$ השואפות לנקודה $(0,0)$ עבורן גבולות

של סדרות הפונקציות שונות: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n)$.

נבחר שתי סדרות שונות. $P_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ עבורה, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1$

אולם עבור הסדרה $Q_n \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right)$ נקבל $\lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4/n^2}{5/n^2} = \frac{4}{5}$

לכן $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ לא קיים.

פתרון בדרך אחרת- אם נתקרב לנקודה $(0,0)$ לאורך הקווים ישרים $y = mx$, נקבל שגבול

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{x^2(m^2 + 1)} = \frac{2m}{m^2 + 1}$ תלוייה ב- m . לכן גבול לא קיים.

שימו לב: התוצאה שלא תלוייה ב- m לא מבטיחה קיומו של הגבול. לדוגמא לפונקציה $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ גבול בנקודה $(0,0)$ לאורך של כל ישר $y = mx$ שווה ל-0, אומנם עבור $x = y^3$ גבול שווה ל-0.5.

דוגמא 2: חשב $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

פתרון: אם נקטין מכנה נקבל: $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^2 y|}{x^2} = |y|$, לכן $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = 0$ ומכאן

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

דוגמא 3: בדוק את רציפות הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2 x)}{y^2}, & y \neq 0 \\ 2, & y = 0 \end{cases}$

פתרון: פונקציה $f(x, y)$ רציפה בנקודה (x_0, y_0) אם היא מוגדרת בסביבה של הנקודה

ו- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

עבור $y \neq 0$ הפונקציה רציפה כי היא שווה למנה של שתי פונקציות רציפות.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(y^2 x)}{y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(y^2 x)}{y^2 x} \cdot x = 1 \cdot x_0 = x_0 - 1 \quad f(x_0, 0) = 2$$

עבור $x_0 \in \mathbb{R}$ ו- $y = 0$ שרירותית נקבל $f(x_0, 0) = 2$

לכן אם $x_0 = 2$ פונקציה רציפה. (כי ערך של פונקציה בכל נקודה שבה $y = 0$ שווה ל-2)

תשובה: נקודות א-רציפות של פונקציה הן $\{(x, y) | x \neq 2, y = 0\}$

תרגילים.

1. חשב גבולות הבאים:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^4 + y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^4 + y^4}} \quad \text{א} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{(x+y)^2}{(x^2 + y^4)^2} \quad \text{ב} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{ג}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \quad \text{לא קיים גבול} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$3. \text{ הוכח כי גבול } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ לא קיים.}$$

4. האם קיימים גבולות חוזרים $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ ו- $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ עבור הפונקציה

$$g(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{א} \quad f(x, y) = \frac{y + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x + y} \quad \text{ב}$$

האם עבור הפונקציה מסעיף ב' קיים גבול כפול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} g(x, y)$?

$$5. \text{ הוכח כי הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ אינה רציפה בנקודה } (0, 0).$$

6. מצא את נקודות אי-הרציפות של הפונקציות הבאות:

$$u = \ln(1 - (x-2)^2 - (y+3)^2 - z^2) \quad \text{א} \quad z = \frac{1}{\sin x \cdot \cos y} \quad \text{ב} \quad z = \frac{x-y}{x^3 - y^3} \quad \text{ג} \quad z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$7. \text{ מצא את ערך הפרמטר } a \text{ עבורו הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y} \cdot e^{-\frac{1}{|x+y|}}, & x+y \neq 0 \\ a, & x+y = 0 \end{cases} \text{ רציפה ב- } \mathbb{R}^2.$$

תשובות ורמזים:

1א. 1, 1ב. 0, 1ג. 0

$$2. \text{ אם } y = 0, x = t \text{ אזי לא קיים גבול } \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}$$

$$3. \text{ עבור } x=t, y=t^2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \quad \text{אולם,} \quad \lim_{\substack{x=y=t \\ t \rightarrow \infty}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{t^4 + t^2} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1$$

$$4. \text{ גבולות חוזרים לא קיימים אבל גבול כפול קיים : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} g(x, y) = 0$$

$$5. \text{ גבול } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \text{ לא קיים - ראה דוגמא 1.}$$

$$6. \text{ א. } (0, 0), \text{ ב. } y = x, \text{ ג. הישרים } x = \pi k \text{ ו- } y = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$6. \text{ כדור פתוח (בלי מעטפת) עם מרכזו בנקודה } (2, -3, 0) \text{ ורדיוסו 1.}$$

$$7. a = 0$$