אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 02.02.2014
מרצים: ד"ר ר. ליפיאנסקי
מועד א: אלגברה לפיזיקאים
מס' הקורס: 201.1.9241
שנה: א סמ' א מועד: א'
סמ' ב משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: מחשב כיס עם צג קטן

(1) ענה על 4 מ- 5 שאלות הבאות, נא לא לענות על יותר מ-4 שאלות ,
(2) משקל כל שאלה 25 נקודות ,
(3) כל תשובה צריכה להיות מנומקת ,
(4) בעמוד הראשון של מחברת הבחינה ציינו על
איזה שאלות אתם עונים .

שאלה 1. יהי $\mathbf{R}_2[x]=\{a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_i\in\mathbf{R}\}$ מרחב וקטורי של כל הפולינומים מעל $\mathbf{R}$ ממעלה ≤ 2.

על אופרטור לינארי $S:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}_2[x]$ ידוע כי

$$S(x^2+x+1)=S(x+1)=S(x^2+1)=x+1$$

א)*(7 נק')* מצאו את המטריצה המייצגת S בבסיס הסטנדרטי $e=<1,x,x^2>$.

ב)*(8 נק')* מצאו את $S^2(ax^2+bx+c)$.

ג)*(10 נק')* מצאו את בסיס ומימד של $Ker\,S, \mathrm{Im}\,S, Ker\,S\cap\mathrm{Im}\,S, Ker\,S+\mathrm{Im}\,S$.

שאלה 2. יהי מטריצה $A(b)=\begin{pmatrix} b & 2 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ מעל שדה $\mathbf{R}$.

א)*(18 נק')* מצאו כל הערכים של פרמטר b כך שעבורם המטריצה $A(b)$ ניתנת ללכסון?

ב)*(7 נק')* עבור $b=0$ מצאו את המטריצה Q ואת המטריצה אלכסונית D כך ש- $D=Q^{-1}\cdot A(0)\cdot Q$.

שאלה 3. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א)*(8 נק')* אם $A:V\to V$ אופרטור לא סינגולרי (ז.א., $\det A\neq 0$) על V. אזי האופרטורים A ו- A^{-1} בעלי אותה קבוצת וקטורים עצמיים. נמקו!

ב)*(8 נק')* במרחב $\mathbf{R}_3[x]=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_i\in\mathbf{R}\}$ כל הפולינומים מעל $\mathbf{R}$ ממעלה ≤ 3 קיים בסיס $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ שבו כל הפולינום בעלי החזקה 3. נמקו!

ג)*(9 נק')* יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbf{R}$ ו- $W_1,W_2\subseteq V$ תתי מרחבים של V. אם $W_1\cap W_2\neq 0$ אזי $W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}\neq 0$. נמקו!

שאלה 4. יהי $V = \mathbf{R}^4$ מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית הסטנדרטית. יהי $W = Sp((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0))$.

א)*(10 נק')* מצאו בסיס אורתוגונלי ל- W.

ב)*(15 נק')* מצאו מערכת משוואות לינארית עבורה $W^{\perp}$ הוא מרחב הפתרונות .

שאלה 5. א)*(13 נק')* פתרו את המשוואה הבאה:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{pmatrix} = 0 .$$

ב)*(12נק')* נתונה מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ a^2 & 2 & 3 \\ a^3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

שמייצגת את האופרטור הלינארי $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.

מצאו כל הערכים של פרמטר a שעבורם $(1,1,1) \in \mathrm{Im}T$.

בהצלחה !

-ד

פתרונות

פתרון 11

מהתנאים של השאלה נובע כי

א

$S(x^2)=S(x^2+x+1)-S(x+1)=x+1-(x+1)=0$

$S(1)=S(x^2+1)-S(x^2)=x+1-0=x+1$

$S(x)=S(x+1)-S(1)=(x+1)-(x+1)=0$

כך נוכל את המטריצה המייצגת של S בבסיס

$e=\langle 1,x,x^2\rangle$

$$T=[S]_e=\begin{array}{c|ccc} & S1 & Sx & Sx^2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ב נחשב $S^2(ax^2+bx+c)$

$S^2(ax^2+bx+c)=S(S(ax^2+bx+c))=S(S(c))=$

$=S(c(x+1))=c(S(x)+S(1))=c(x+1)$

ג. פולינום $ax^2+bx+c\in\ker S$ אם"ם $S(ax^2+bx+c)=0$

לפי סעיף א $S(c)=c(x+1)=0$ מכאן נובע כי $c=0$

קיבלנו כי $ax^2+bx+c\in\ker S \iff c=0$

$\ker S=\{ax^2+bx \mid a,b\in R\}$

$\ker S=sp(x,x^2)$.

ניתן לפתור את $\ker S$ בדרך אחרת. ידוע כי

$v\in\ker S \iff Sv=0$

$[S]_e[v]_e=0$

נסמן $[v]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$, x_2 x_3 משתנים חופשיים!

$$Ker\, S = \{ v \mid [v]_e = (0,a,b) \}$$

נעבור לפולינומים ונקבל

$$Ker\, S = Sp(x, x^2) \Rightarrow \dim Ker\, S = 2$$

כך נמצא את $Im\, S$:

$$v \in Im\, S \Leftrightarrow [v]_e \in Sp\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = Sp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם $v \in Im\, S$, אזי $v \in Sp(x+1)$. כלומר מכאן $Im\, S = Sp(x+1)$

$\Rightarrow \dim Im\, S = 1$

אז

$$Ker\, S + Im\, S = Sp(x, x^2, x+1) = Sp(1, x, x^2) = \mathbb{R}_2[x].$$

נוסחת

$$\dim(Ker\, S + Im\, S) = \dim Ker\, S + \dim Im\, S - \dim(Ker\, S \cap Im\, S)$$

מכאן ; לכן $0 = \dim(Ker\, S \cap Im\, S)$

$$Ker\, S \cap Im\, S = 0.$$

<u>סעיף 2</u> נמצא פולינום אופייני של $A(b)$

$$|A(b)-\lambda I| = \begin{vmatrix} b-\lambda & 2 & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)$$

נפתור את משוואת אופייני של $A(b)$

$$(b-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=b$$

מהתאוריה ידוע כי אם ערכים עצמיים של $A(b)$ שונים אז $A(b)$ ניתנת ללכסון. כלומר [?] אם $b\notin\{0,1\}$ אז $A(b)$ ניתנת ללכסון. בודקים ערכים $b=0$ ו $b=1$ בנפרד

(1) $b=1$ ז.א $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ משוואה אופיינית

עבור $A(1)$ נקבל

$$|A(1)-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)=0$$

ז.א $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ ערכים עצמיים של $A(1)$

בונים בסיסים במרחבים עצמיים $W(0)$ + $W(1)$ המתאימים לערכים עצמיים $\lambda_1=0$ + $\lambda_2=1$

$$W(0)=\{v\in R^3 \mid A(1)v=0v\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$$ ז.א

$W(0)=Sp(-1,0,1)$

כתוצאה מזה

$\dim W(0)=1$

$W(1) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A(1)v = 1\cdot v \}$

$(A(1) - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$

$W(1) = Sp((1,0,0))$, $\dim W(1) = 1$

מכיון ש- $\dim W(1) + \dim W(0) = 2 \neq 3$

מטריצה $A(1)$ לא ניתנת ללכסון

2) נמצא במקרה $\beta = 0$ ז"א $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) נחשב מרחבים עצמיים $W'(0)$

$W'(0) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A(0)v = 0 v \}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0$

$x_3 + x_1$ משתנים חופשיים

$W'(0) = Sp((1,0,0), (0,0,1))$, $\dim W'(0) = 2$

2) נחשב מרחב עצמי $W'(1)$

$W'(1) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A(0)v = 1\cdot v \}$

$(A(0) - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow W'(1) = Sp(2,1,0)$

$\dim W'(1) = 1$

מכיון ש $\dim W'(0) + \dim W'(1) = 3$ לכסינה $A(0)$

ניתנת ללכסון

מסקנה: $A(\theta)$ ניתנת ללכסון אם"ם $\theta \neq 1$

2 גם ניתנת במקרה $\theta = 0$ כ.ו $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

מסעיף א ידוע ש $A(0)$ ניתנת ללכסון ומכאן ע"י D

צורה אלכסונית שלה בבסיס הווקטורים העצמיים

$u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ כ- $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (1,0,0)$, $u_3 = (0,0,1)$

בסיס. כלו'

$$D = [I]_u^e \, A(0) \, [I]_e^u$$

כאשר $[I]_e^u = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מסמנים $[I]_e^u = Q$

לפי התנאים שלנו. כתוצאה מכך נקבל

$$D = \begin{array}{c|ccc} & Au_1 & Au_2 & Au_3 \\ \hline u_1 & & & \\ u_2 & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ u_3 & & & \end{array}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $D = Q^{-1} A(0) Q$

שאלה 10 (א) נניח ש-$v \neq 0$ וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda \in K$. אזי $Av = \lambda v$.

בשוויון הנ"ל $v \neq 0$ משום שאם $\lambda = 0$ נקבל $Av = 0$ כ.ש. $A \neq 0$ והאופרטור A סינגולרי

נתבונן בשוויון $Av = \lambda v,\ \lambda \neq 0$ ונקבל

$$A^{-1}(\lambda v) = v \Rightarrow \lambda A^{-1} v = v$$

$$\Downarrow$$

$v \lambda^{-1} = A^{-1} v$ כ.ש. v וקטור עצמי של A^{-1} השייך לערך עצמי λ^{-1}.

2 (ב) נתונה סדרת הפולינומים מ-$R_3[x]$

$$P_1(x) = x^3,\quad P_2(x) = x^3 + 1 \quad P_3(x) = x^3 + x$$

$$P_4(x) = x^3 + x^2$$

קל לראות שהם יוצרים הבסיס של $R_3[x]$ כך שכל הפולינומים בו בעל מעלה 3

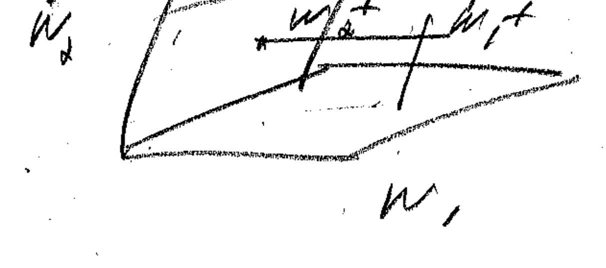
(ג) (לא) נתונה במרחב $\mathbb{R}^3$ שני מרחבים

$$W_1 = Sp((1,0,0),(0,1,0))$$

$$W_2 = Sp((0,1,0),(0,0,1))$$

$W_2^{\perp} = Sp(1,0,0)$ + $W_1^{\perp} = Sp(0,0,1)$ אזי

$W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} = 0$ כמו כן מתקיים $W_1 \cap W_2 \neq 0$



פתרון שאלה 10 א' נתון $v_1=(1,1,0,0)$, $v_2=(1,1,1,0)$ ו $v_3=(1,1,1,1)$

12 נמצא בסיס אורתוגונלי של $W=Sp(v_1,v_2,v_3)$

לפי הנוסחה

$$w_i = v_i - \frac{\langle v_i, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle v_i, w_{i-1}\rangle}{\langle w_{i-1}, w_{i-1}\rangle} w_{i-1}$$

$i=1,2,3$

ונקבל

$$w_1 = v_1 = (1,1,0,0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle w_1}{\langle w_1, w_1\rangle} = (0,0,1,0)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = (0,0,0,1)$$

$w_1=(1,1,0,0)$, $w_2=(0,0,1,0)$ $w_3=(0,0,0,1)$ וקיבלנו

וקיבלנו בסיס אורתוגונלי של W

ב' ידוע כי $v\in W^\perp$ אם״ם $v\perp w_1$, $v\perp w_2$, $v\perp w_3$

לכן $\langle v, v_i\rangle = 0$ עבור $i=1,2,3$

נסמן $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$\begin{cases}\langle v, v_1\rangle = 0\\ \langle v, v_2\rangle = 0\\ \langle v, v_3\rangle = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$W^\perp = Span(1,-1,0,0) \quad \text{לכן} \quad \begin{cases} x_4=0\\ x_3=0\\ x_1=-x_2\end{cases}$$

שאלה 5 בהינתן המטריצה A

פתרון

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ & & & & \\ 1 & 2 & 3 & & x+1 \end{pmatrix}$$

נביא לצורה משולשת של A ע"י פעולות שורה אלמנטריות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ & & \vdots & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \\ L_n - L_1 \to L_n}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x-n+1 \end{pmatrix} = A'$$

מכיוון ש $\det A = \det A'$ ו $\det A' = 1(x-1) \cdots x-(n+1)$

נקבל את המשוואה $(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)) = 0$

ע.כ. $x_1 = 1,\ x_2 = 2, \cdots x_m = n-1$

פתרונות שהמשוואה הנ"ל

שיטה שניה אם במטריצה A נציב את $x=1$ ונקבל ש-A

שתי עמודות שוות ע.כ. $\det A = 0$ באותו אופן

נציב במקום x את המספרים $2, \cdots, n-1$ ונקבל $\det A = 0$

מכיוון ש המעלה של פולינום $\det A$ היא שווה ל$(n-1)$

נקבל כי השורשים של A הם

$x_1 = 1,\ x_2 = 2, \cdots x_n = n-1.$

ב נחשב את הדטרמיננטה של A

$$\det A=\begin{vmatrix} a & 1 & 4\\ a^2 & 2 & 3\\ a^3 & 4 & 1\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}-a^2\begin{vmatrix}1&4\\4&1\end{vmatrix}+a^3\begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}$$

$$=-a(a^2-5a+10)$$

המשוואה $-a(a^2-5a+10)=0$ מעל $\mathbb{R}$ שקולה

רק פתרון $a=0$ ז.א אם $a\neq 0$ אז T איזומורפיזם

כאשר $[T]_e=A$ ולכן הוא על ולכן $T(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3$ ז.א

כתוצאה מכך $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}\,T$

נבדוק במקרה $a=0$. אז $A=\begin{pmatrix}0&1&4\\0&2&3\\0&4&1\end{pmatrix}$

ברור ש $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}\,T$ אמ"מ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in Sp\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right)$

ז.א המערכת $x_1\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ שקולה

לפחות פתרון אחד. נבדוק את זה.

$$\begin{cases}x_1+4x_2=1\\2x_1+3x_2=1\\4x_1+x_2=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1+4x_2=1\\5x_2=1\end{cases}\ (*)$$

ז.א למערכת $(*)$ יש פתרונות כתוצאה מכך

לכל $a\in\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}\,T$