אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 20.5.05

שם המורה: פרופ' מרום כהן

מבחן ב: אלגברה לפיזיקאים

מסי הקורס: 0.201.1.9241

מיועד לתלמידי: פיזיקה

שנה: תשסה סמ': א' מועד: מיוחד

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: אין

בהצלחה!

מס' נבחן: ______

ענו על 4 מ-5 השאלות הבאות.
יש לציין במפורש אלו שאלות לבדוק.
יש לנמק את תשובותיכם.

1. נתונה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3(1-a-a^2) \\ a & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה מעל הממשיים.

סעיף א'. מצאו את דרגת A לכל $a \in \mathbb{R}$.

סעיף ב'. עבור אילו ערכים של a המטריצה A הפיכה?

סעיף ג'. " " " " מתקיים $\det A = 0$.

סעיף ד. נסמן ב- W את מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$. עבור אילו ערכים של a:

(1) $\dim W = 0$, (2) $\dim W = 1$, (3) $\dim W = 2$, (4) $\dim W = 3$.

סעיף ה'. השתמשו בכלל קרמר כדי לחשב את הנוסחא ל- x במערכת

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}$$

(2)

א'. 7 נק' תהי $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ מטריצה מעל $\mathbb{R}$.

מצאו את הערכים של a שעבורם A ניתנת ללכסון.

9 נק' ב. יהי $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ אופרטור לינארי ויהי $B=$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^2$, ותהי המטריצה A הבאה $[T]_B^B$ (המטריצה של T לפי הבסיס B)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

מצאו את הערכים העצמיים של T

מצאו מטריצות P ו-D כך ש $P^{-1}AP=D$ באשר D מטריצה אלכסונית

4 נק' ג. מצאו את P^{-1} מחלק ב' באמצעות adjoint.

(3) יהי V מרחב המטריצות 2×2 מעל Z_7, ויהי

$$W_1=\left\{A\in V \;\middle|\; A=\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2=\left\{A\in V \;\middle|\; A=\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}\right\}$$

5 נק' א. הוכיחו ש W_1 תת מרחב של V ומצאו לו בסיס B_1.

7 נק' ב. מצאו את המימדים של W_1+W_2, $W_1\cap W_2$.

5 נק' ג. השלם את B_1 לבסיס של W_1+W_2

7 נק' ד. אם $A\in W_1+W_1$ מצאו את הקואורדינטות של A לפי הבסיס שמצאת בחלק ג.

(4) יהי $V=\mathbb{C}^3$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $W=Sp\{(1+i,-i,0),(i,-i,0)\}$

נסמן ב-$W^\perp$ את $\{v\in V \mid \langle v,w\rangle=0,\ \forall w\in W\}$

סעיף א. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-W, B.

סעיף ב. מצאו בסיס ל-$W^\perp$.

סעיף ג. מצאו את המימדים של $W\cap W^\perp$ ושל $W+W^\perp$.

סעיף ד. מצאו את הקואורדינטות של $w=(a,b,c)\in W$ לפי הבסיס B מחלק א'. האם $(5+i,2-i,0)\in W$?

(5) הסעיפים הבאים של שאלה זו אינם תלויים זה בזה. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית. F מסמן שדה, V,W מסמנים מרחבים וקטוריים מעל F.

סעיף א. יהי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, $T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית כך ש $T(v_i)\neq 0$ לכל $i=1,\dots,n$. אזי $\ker T=\{0\}$.

סעיף ב. נניח $0\neq A\in M_{2\times 2}(F)$. אם $A^2=0$ אזי A אינה ניתנת ללכסון מעל F.

סעיף ג. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש $T\neq 0, T^2=0$ אזי $\ker T\subset \operatorname{Im} T$.

סעיף ד. יהיו $A,B\in M_{n\times n}(F)$. אם קיים $0\neq v\in F^n$ כך ש: $Av=Bv$ אזי $\det(A-B)=0$.

בהצלחה!