אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 13.2.05

שם המורה: פרופ' מרגולין

מבחן ב: אלגברה לפיזיקאים

מסי הקורס: 201.1.9241

מיועד לתלמידי: פיזיקה

שנה: תשס"ה סמ': א' מועד: ב'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: אין

מס' נבחן: ______

ענה על 4 מ-5 השאלות הבאות.
יש לציין במפורש אילו שאלות לבדוק.
יש לנמק כל תשובותיכם

בהצלחה!

1. נתונה $A\in M_{3\times5}(\mathbb{C})$ הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2i & 2+i & -1 & -1 \\ i & -2 & i & 1 & -1 \\ 2+i & -2+4i & 1+2i & -3i & i \end{pmatrix}$$

7 נק' א. מצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת: $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_5\end{pmatrix}=0$.

6 נק' ב. מצא את התנאים על הוקטורים $y\in\mathbb{C}^3$ עבורם קיים פתרון למערכת $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_5\end{pmatrix}=y$. נמק!

7 נק' ג. תהי $T_A:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^3$ נתונה ע"י $T_A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_5\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_5\end{pmatrix}$

מצא בסיס ל- $\operatorname{Im}T_A\cap Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1+i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1-i\\0\end{pmatrix}\right\}$

5 נק' ד. מצא בסיס ל- $\operatorname{Ker}T_A$.

(4) יהי $V=\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=Sp\{(1+i, i, 0)\}$. נסמן ב:

$$W^{\perp}=\{v\in V \mid \langle v,w\rangle=0,\ \forall w\in W\}$$

9 נק' א. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$W^{\perp}$.

8 נק' ב. תהי $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ קבוצת וקטורים אורתוגונלית המוכלת ב-V. הוכיחו שאחד הוקטורים בקבוצה הנ"ל וקטור ה-0.

8 נק' ג. הקבוצה $B=\{(3,0,4),(-4,0,3),(0,9,0)\}$ המוכלת ב-V הוא אורתוגונלית. מצאו את הקואורדינטות של $u=(7+i,8-i,3)$ לפי B ישירות מעובדת האורתוגונליות (לא ע"י פתרון מערכת משוואות).

---

(5) בסעיפים השונים של שאלה זו אינם תלויים זה בזה. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית. F מסמן שדה.

6 נק' א. יהיו W,V מרחבים וקטוריים מעל F. יהי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V. תהי $T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית. אם $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בלתי תלויה לינארית אז $\ker T=\{0\}$.

6 נק' ב. יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד 2. יהיו W_1,W_2 תתי מרחב של V בעלי מימד 1. אז $W_1=W_2$.

6 נק' ג. נתונה המערכת $AX=0$ כאשר $A\in M_{m\times n}(F)$. אז מרחב הפתרונות של המערכת שווה למרחב השורות של A.

7 נק' ד. יהי V מרחב וקטורי מעל F. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. אם u,v הם וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים אז לא קיימים $\alpha,\beta\in F$ כך ש $\beta u+\alpha v\neq 0$ הוא וקטור עצמי של T.

בהצלחה!

מועד ב'
אלגברה לפיזיקאים

② יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ אוסף הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ שמעלתם קטנה או שווה ל-3.
יהי $W=Sp\{x^2+x,\ x^3-x,\ 2x^2+2x^3\}$

4 נק' א. מצאו בסיס ל-W.
5 נק' ב. השלימו את הבסיס מסעיף א' לבסיס של V, וסמנו ב-C.
7 נק' ג. מצאו אופרטור לינארי $T:V\to V$ כך ש $W=\ker T$.
6 נק' ד. חשבו את $[T]^C_C$.
5 נק' ה. חשבו את $T(5+2x+3x^2-x^3)$.

③ תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\-2&2&3\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

7 נק' א. מצאו בסיס של וקטורים עצמיים של האופרטור $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$
הנתון ע"י $T_A(X)=AX$.

5 נק' ב. מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D
כך ש $D=P^{-1}AP$.

5 נק' ג. מצאו את P^{-1} (מסעיף ב') באמצעות adjoint.
5 נק' ד. מצאו את כל ה-$a\in\mathbb{R}$ כך שהמטריצה $A-aI$ הינה מטריצה הפיכה.