1). יהיה $R_3[t]=\{p(t)=a_1+a_2t+a_3t^2 \mid a_1,a_2,a_3\in R\}$ מרחב הפולינומים מדרגה קטנה מ- 3 , $p_1(t)=a_1+a_2t+a_3t^2, p_2(t)=b_1+b_2t+b_3t^2\in R_3[t]$.
בדוק כי הנוסחאות הבאות מגדירות מכפלות פנימיות ב- $R_3[t]$:

א). $\langle p_1,p_2\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$ ב). $\langle p_1,p_2\rangle=\int_0^1 p_1(t)p_2(t)dt$

2). יהיה R^2 מרחב ליניארי מעל R . $T\in L(R^2)$.
האם הנוסחה $\langle v,u\rangle_T=\langle T(v),u\rangle_{St}$ מגדירה מכפלה פנימית ב- R^2 כאשר:

א). $[T]_{St}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ ב). $[T]_{St}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$

3). עבור כל $n\in N$ וכל $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in R$ הוכח את אי-השוויון הבא:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_jb_j\right)^2\le\left(\sum_{j=1}^n ja_j^2\right)\left(\sum b_j^2/j\right)$$

4). יהיה V מרחב מכפלה פנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$ שמגדירה נורמה $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$,
$v,u\in V$ וקטורים שמקיימים: $\|u\|=3$, $\|v+u\|=4$, $\|u-v\|=6$. חשב את $\|v\|$.

5). האם קיימת מכפלה פנימית על R^2 שמגדירה את הנורמה: $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$?

6). יהיה V ממ"פ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מעל R שמגדירה נורמה $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$
הוכח שלכל $v,u\in V$ מתקיים: $\langle u,v\rangle=\dfrac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4}$.

7). יהיה V ממ"פ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מעל C שמגדירה נורמה $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$
הוכח שלכל $v,u\in V$ מתקיים:

$$\langle u,v\rangle=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4}+i\frac{\|u+iv\|^2-\|u-iv\|^2}{4}.$$

8). הוכח כי הקבוצה: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt\pi},\frac{\cos t}{\sqrt\pi},\frac{\sin(2t)}{\sqrt\pi},\frac{\cos(2t)}{\sqrt\pi},\dots,\frac{\sin(nt)}{\sqrt\pi},\frac{\cos(nt)}{\sqrt\pi}\right\}$ כאשר $n\in N$ היא קבוצה אורתונורמלית ב- $C([0,2\pi])$ עם מכפלה פנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(t)g(t)dt$$

9). יהיה מרחב מכפלה פנימית $R_3[t]$ מעל R , $B_1=\{1,t,t^2\}\subset R_3[t]$ בסיס ב- R .
בנה בסיס אורתונורמלי של R ע"י תהליך גרם-שמידת כאשר המכפלה הפנימית מוגדרת:

א). $\langle p_1,p_2\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$ ב). $\langle p_1,p_2\rangle=\int_0^1 p_1(t)p_2(t)dt$

10). יהיה $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
$v_1=(1,\ 0,\ -1,\ 1)$, $v_2=(2,\ 3,\ -1,\ 2)$, $W=\{v\in V: v\perp Span\{v_1,v_2\}\}$.
מצא בסיס של W.

11). יהיה $V=C^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
$W=Span\{v_1=(1,\ 0,\ i), v_2=(2,\ 1,\ 1+i)\}$
מצא בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$.

12). יהיה R^2 מרחב ליניארי מעל R . $T\in L(R^2)$, כאשר

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}.$$

בדוק כי $\forall v\in R^2:\langle T(v),v\rangle_{St}=0$.

13). יהיה R^2 מרחב ליניארי מעל R .
בדוק כי לכל מכפלה פנימית $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ב- R^2 קיימת מטריצה $G \in M^{2x2}[R]$ שמגדירה את מ"פ:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

14)*. יהיה V מרחב ליניארי ממימד סופי מעל שדה F (C או R).
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א). יהיו $\langle \cdot,\cdot \rangle_1$, $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$ שתי מכפלות פנימיות.
אזי $f(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle_1 + \langle \cdot,\cdot \rangle_2$ מכפלה פנימית.

ב). יהיו $\langle \cdot,\cdot \rangle_1$, $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$ שתי מכפלות פנימיות.
אזי $f(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle_1 - \langle \cdot,\cdot \rangle_2$ מכפלה פנימית.

ג). תהיה $\langle \cdot,\cdot \rangle$ מכפלה פנימית. אזי $\forall v \in V : \langle v, O_V \rangle = 0$.

ד). תהיה $\langle \cdot,\cdot \rangle$ מכפלה פנימית. $u \in V$, $\forall v \in V : \langle v,u \rangle = 0$. אזי $u = O_V$.

ה). תהיה $\langle \cdot,\cdot \rangle$ מכפלה פנימית. $u \in V$, $\exists v \in V, v \neq O_V : \langle v,u \rangle = 0$. אזי $u = O_V$.

ו). תהיה $\langle \cdot,\cdot \rangle$ מכפלה פנימית. $u \in V$, $\forall v,w \in V : \langle v,u \rangle = \langle w,u \rangle$. אזי $u = O_V$.

ז). יהיה $W \subseteq V$ תת-מרחב. אז' $\left(W^\perp\right)^\perp = W$

ח). יהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ שני תתי-מרחבים. $W_1 \subseteq W_2$. אז' $W_1^\perp \supseteq W_2^\perp$.

ט). יהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ שני תתי-מרחבים.
אזי $\left(W_1 + W_2\right)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$, $\left(W_1 \cap W_2\right)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

י). יהיה $T \in L(V)$ אופרטור ליניארי, $\forall v,u \in V : \langle T(v),u \rangle = 0$. אזי $T = O$.

יא). יהיה $T \in L(V)$ אופרטור ליניארי, $\forall v \in V : \langle T(v),v \rangle = 0$. אזי $T = O$.