

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . הוכח את התכונות הבאות של מרחב:
 (א) קיים וקטור אפס O_V יחיד במרחב ולכל וקטור $v \in V$ $O_V v = v = O_V$
 (ב) ולכל וקטור $v \in V$ במרחב קיים וקטור נגדי $(-v)$ יחיד ו- $(-v) = (-1_F)v$

2. נתונה קבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{z = x + \sqrt{2}y : x, y \in Q\}$ עם פעולות חיבור וכפל בסקלר מ-
 Q המוגדרות בצורה הבאה עבור $z_1 = x_1 + \sqrt{2}y_1, z_2 = x_2 + \sqrt{2}y_2, \alpha \in Q$:
 $\alpha z_1 = \alpha x_1 + \sqrt{2}\alpha y_1, z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \sqrt{2}(y_1 + y_2)$
 הוכח כי $Q[\sqrt{2}]$ מהווה מרחב וקטורי.

3. נתון $V = Q^4$ מרחב וקטורי מעל Q . קבע האם U מהווה תת-מרחב וקטורי של V כאשר:

(א) $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in V \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1\}$

(ב) $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in V \mid a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}$

(ג) $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in V \mid a_2 = a_3\}$

(ד) $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in V \mid a_4 > 0\}$

4. נתונה הקבוצה $F[t] = \{\sum_{i=0}^k a_i t^i \mid k \in N; a_1, \dots, a_k \in F\}$ של כל הפולינומים עם

מקדמים בשדה F .

- (א) הוכח כי $F[t]$ מהווה מרחב וקטורי מעל F (ביחס לפעולות חיבור פולינומים וכפל בסקלר).
 (ב) יהי $n \in N$ מספר טבעי ויהיו $a, b \in F$. אילו מהקבוצות הבאות הן תתי-מרחבים של V ?

(1) $P_1 = \{f \in F[t] \mid f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n\}$ (קבוע - n)

(2) $P_2 = \{f \in F[t] \mid a_n \neq 0\}$

(3) $P_3 = \{f \in F[t] \mid f(t) + f(-t) = 1\}$

(4) $P_4 = \{f \in F[t] \mid f(a) = f(b) = 0\}$

5. נתונה הקבוצה של כל המטריצות 2×2 עם איברים בשדה F :

$$F^{2 \times 2} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}$$

- (א) הוכח כי $F^{2 \times 2}$ מהווה מרחב וקטורי מעל F (ביחס לפעולות חיבור מטריצות וכפל בסקלר).
 (ב) אילו מהקבוצות הבאות הן תתי-מרחבים של V ?

$F = \mathbb{R}$ /10 (1) $W_1 = \{A \in F^{2 \times 2} \mid a + b + c + d \geq 0\}$

(2) $W_2 = \{A \in F^{2 \times 2} \mid a + b = 0\}$

(3) $W_3 = \{A \in F^{2 \times 2} \mid b = c\}$

(4) $W_4 = \{A \in F^{2 \times 2} \mid ad - bc \neq 0\}$

6. יהי V מרחב של פונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מעל \mathbb{R} . אלו מתתי-הקבוצות הבאות מהוות תת-מרחב וקטורי ב- V ?

(א) $\{f \mid f(x^2) = (f(x))^2\}$ (ב) $\{f \mid f(3) = 1 + f(-5)\}$
 (ג) $\{f \mid f(0) = f(1)\}$ (ד) $\{f \mid f(-1) = 0\}$ (ה) $\{f \mid f(-x) = -f(x)\}$

7. יהי W מרחב הפתרונות של המערכת הבאה מעל \mathbb{Q} . מצא קבוצה סופית של וקטורים הפורשת את W .

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

8. נתונים $W_1, W_2 \subset V$ שני תתי-מרחבים של מרחב וקטורי V .

נגדיר $W_1 + W_2 = \{v = w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$.

(1) הוכח כי $W_1 + W_2$ הוא תת-מרחב של V .

(2) הוכח כי $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ ו- $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(3) הוכח כי $W_1 + W_2$ הוא התת-מרחב הקטן ביותר של V המכיל את W_1 ו- W_2 .

9. נתונים $W_1, W_2 \subset V$ שני תתי-מרחבים של מרחב וקטורי V .

הוכח: אם $W_1 \cup W_2$ הוא תת-מרחב אזי $W_1 \subset W_2$ או $W_2 \subset W_1$.

10. למערכת המשוואות ההומוגנית שלהלן, מצא את כל הפתרונות, מצא קבוצה סופית של וקטורים הפורשת את מרחב הפתרונות שלה:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{C}$$