1). יהי $V = Z_2{}^3$ מרחב וקטורי מעל Z_2.
רשום את כל הצרופים הלינאריים האפשריים של הוקטורים $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$.

2). יהיו $V = Z_2{}^3$ מרחב וקטורי מעל Z_2 ושני וקטורים $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$.
בנה את $W = \text{Span}(v_1, v_2)$

3).
א). יהי R^2 מרחב וקטורי מעל R.
בטא את הוקטור $v = (5,1)$ כצרוף לינארי של הוקטורים $v_1 = (3,-7)$, $v_2 = (1,4)$.
ב). יהי R^3 מרחב וקטורי מעל R. בטא את הוקטור $v = (5,-16,8)$
כצרוף לינארי של הוקטורים $v_1 = (1,-3,-2)$, $v_2 = (-1,5,4)$, $v_3 = (0,3,6)$

4). יהי R^4 מרחב וקטורי מעל R. עבור אילו ערכים של הפרמטר m וקטור v שייך לתת-מרחב הנפרש על-ידי הוקטורים v_1 ו- v_2 ? מצא את הצרוף לינארי המבטא את v .
א). $v = (1,m,-m)$, $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,1,-1)$.
ב). $v = (m,-1,-2)$, $v_1 = (2,1,-m)$, $v_2 = (3,2,0)$.

5). האם הוקטורים $v_1 = (2,-1,-5,2)$, $v_2 = (2,1,1,6)$, $v_3 = (1,1,2,4)$, $v_4 = (1,-1,-4,0)$
במרחב R^4 מעל R בלתי תלויים ליניארית ?

6). יהי $V = Z_5{}^3$ מרחב וקטורי מעל Z_5.
עבור אילו ערכים של הפרמטר m וקטורים תלויים ליניארית?
א). $v_1 = (1,m,3)$, $v_2 = (1,1,-1)$, $v_3 = (2,1,-1)$.
ב). $v_1 = (3,-2,1)$, $v_2 = (2,1,-3m+1)$, $v_3 = (m,-1,-2)$.

7). האם הוקטורים $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (0,-3,2)$ פורשים את המרחב R^3 ?

8). יהי V מרחב וקטורי מעל F. $B = \{v,u,w\}$ קבוצה של וקטורים בלתי תלויים ליניארית ב- V. הוכח שהוקטורים $3u + 2v + w$, $v + w$, $u + w$ גם בלתי תלויים ליניארית.

9). יהיו $w_1 = (1,1,-2,1)$, $w_2 = (3,0,4,-1)$, $w_3 = (-1,2,5,2)$, $u_1 = (4,-5,9,7)$, $u_2 = (3,1,-4,4)$, $u_3 = (-1,1,0,1)$ וקטורים במרחב R^4 מעל R. אילו בין הוקטורים u_1 , u_2 , u_3 שייכים לתת-מרחב של R^4 הנפרש ע"י הוקטורים w_1 , w_2 , w_3 ?

10). C הוא מרחב ליניארי מעל R. הראה ש- $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + 3i$ פורשים אותו.

11). יהי R^4 מרחב וקטורי מעל R. $U = \text{Span}(u_1, u_2, u_3)$, $W = \text{Span}(w_1, w_2, w_3)$ הם תת-מרחבים של R^4. $u_1 = (1,2,1,1)$, $u_2 = (2,1,0,1)$, $u_3 = (4,5,3,2)$, $w_1 = (1,0,-2,1)$, $w_2 = (1,0,-3,4)$, $w_3 = (2,1,5,-2)$. מצא $U \cap W$.

12). האם הוקטורים הבאים מהווים בסיס ב- R^3 :

א). $(1,2,3)$, $(1,0,-1)$, $(3,-1,0)$, $(2,1,2)$.

ב). $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(2,-1,1)$.

ג). $(1,1,2)$, $(1,2,5)$, $(5,3,4)$.

13). יהי $W = Span(w_1, w_2, w_3)$ הוא תת-מרחב של R^4

כאשר $w_1 = (1,-2,5,-3)$, $w_2 = (2,3,1,-4)$, $w_3 = (3,8,-3,-5)$. מצא בסיס וממד של W .

14). $V = F^{2\times2}$ הוא מרחב של מטריצות ריבועיות 2×2 מעל שדה F.

$W = Span\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\right)$. מצא בסיס וממד של W .

15). $R_4[t] = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : a_0,a_1,a_2,a_3 \in R\}$

מרחב פולינומים בדרגה לא גבוהה מ- 3 .יהי

$W = Span(t^3 + 6t - 5, 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, t^3 - 2t^2 + 4t + 1, 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5)$.

מצא בסיס וממד של W .

16). יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^4 . $W = \{v = (x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U = \{v = (x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4\}$.

מצא בסיס וממד של W , U , $W\cap U$, $W+U$.

17). $R_n[t] = \{p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k : a_0,...,a_{n-1} \in R\}$ מרחב פולינומים בדרגה לא גבוהה מ- $n-1$.

$\alpha_1,...,\alpha_n \in R$ מספרים שונים.

הוכיח שהפולינומים $p_i(t) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (t - \alpha_j)$ מהווים בסיס ב- $R_n[t]$.

18). $V = F^{2\times 2}$ הוא מרחב של מטריצות ריבועיות 2×2 מעל שדה F. יהיו U ו- W שתי קבוצות הבאות:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a,b,c \in F \right\} \ , \ U = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} : x,y,z \in F \right\}$$

א). הוכח כי U ו- W תתי-מרחב של V.

ב). מצא בסיס וממד של U , W , $U+W$ ו- $U \cap W$

19). יהי מרחב R^3 מעל R , $U = \{(a+b,a,b) : a,b \in R\}$ ו- W תת-מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$. מצא בסיס וממד של $U+W$ ו- $U \cap W$.