

1. מצא את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

(א)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , (ב)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , (ג)  $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ .

(ד)  $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i & 3 \\ 1 & 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ , (ה)  $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$ , (ו)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(ז)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ , (ח)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ , (ט)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(י)  $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i & i-\sqrt{2} & 1 \\ 1+\sqrt{3}i & i-\sqrt{3} & 1 \\ 1+\sqrt{3}i & i-\sqrt{4} & 1 \end{pmatrix}$ , (יא)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

(יב)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , (יג)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

(יד)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ , (טו)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ .

(טז)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , (יז)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

2. מצא את הדטרמיננטות של מטריצות עם פרמטר הבאות:

(א)  $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ , (ב)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ .

(ג)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ , (ד)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & n \end{pmatrix}$ .

3. תהי  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  הפיכה כך ש-  $\det(A) = 1 + i$  מצא  $\det(A^{-1})$ .

4. תהי  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  הפיכה  $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \neq 0$  מצא את הדטרמיננטות

הבאות:

$$\det(2A - 5A), \det(2A^{-1})$$

$$\det \begin{pmatrix} 3a - 2c & a + 4c \\ 3b - 2d & b + 4d \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 2a + 3b & 5a - b \\ 2c + 3d & 5c - d \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 2a & 3a + 2b \\ 2c & 3c + 2d \end{pmatrix}$$

5. יהיו  $A, B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$ ,  $\det(A) = \alpha \neq 0$ ,  $\det(B) = \beta \neq 0$  מצאו את הדטרמיננטות הבאות:

$$\det(A^{-1}), \det(-A), \det(3A), \det(A^T A), \frac{\det(A)}{\det(A^T)}$$

$$\det(B^{-1}AB), \det(BA^2B^{-1}), \det(B^{-1}ABA)$$

6. בדוק בעזרת דטרמיננטה האם קבוצות הבאה של וקטורים מ-  $Q^3$  תלויה ליניארית:

א.  $(1, 2, -3), (1, 1, 2), (-1, 0, 1)$       ב.  $(1, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 2)$

7. פתור בעזרת כלל קרמר את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 11 \\ x + 2y - z = 11 \\ 4x - 3y - 3z = 24 \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = 6 \end{cases} \text{ א.}$$

8. יהיו  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$  הוכיחו או הפריכו:

א.  $A$  הפיכה  $\Leftrightarrow A^T$  הפיכה.

ב. אם  $A$  ו-  $B$  הפיכות אז  $A + B$  הפיכה.

ג. אם  $A$  ו-  $B$  לא הפיכות אז  $A + B$  לא הפיכה.

ד. אם  $A$  ו-  $B$  הפיכות אז  $AB$  הפיכה.

ה. אם  $A$  הפיכה ו-  $AB$  לא הפיכה אז  $B$  אינה הפיכה.

9. יהיו  $A, B, C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  כך ש-  $\det(A) = \alpha \neq 0$ ,  $B + 3A^{-1} = O$ ,  $C - (B^2 A)^T = O$  מצא את  $\det(C)$ .

10. יהיו  $A, B, C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  כך ש-  $\det(A) = 2$ ,  $2B + 3A^T = O$ ,  $2C - (B^{-1})^T A^2 = O$  מצא את  $\det(C^2)$ .