1). בדוק אילו בין העתקות הבאות $T:R^2 \to R^2$ הן טרנספורמציות ליניאריות :

א). $T(x,y)=(y,x)$, ב). $T(x,y)=(1+x,y)$, ג). $T(x,y)=(x,y^2)$,

ד). $T(x,y)=(\sin x,y)$, ה). $T(x,y)=(x-y,0)$.

2). האם קיימת טרנספורמציה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ כך ש- $T(1,-1,1)=(1,0)$ ו- $T(1,1,1)=(0,1)$.

3) האם קיימת טרנספורמציה ליניארית $T:R^3 \to R^4$ שמקיימת את התנאי

א). $T(1,2,-1)=(1,0,0,1)$, $T(-1,-1,2)=(-1,0,0,1)$, $T(0,2,2)=(0,0,0,2)$.

ב). $T(1,2,-1)=(1,0,0,1)$, $T(-1,-1,2)=(-1,0,0,1)$, $T(0,1,2)=(0,0,0,2)$.

4). יהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור במרחב V מעל שדה F . $T:V \to F^n$ מוגדרת $Tv=[v]_B$.
האם T היא טרנספורמציה ליניארית?

5). יהיו $v_1=(1,-1)$, $v_2=(2,-1)$, $v_3=(-3,2)$ ו- $u_1=(1,0)$, $u_2=(0,1)$, $u_3=(1,1)$
האם קיימת טרנספורמציה ליניארית $T:R^2 \to R^2$ כך ש- $Tv_i=u_i$ $i=1,2,3$.

6). תהי $T:C^3 \to C^3$ מוגדרת $T(x,y,z)=(x-y+2z,2x+y,-x-2y+2z)$.

א). הוכח כי T טרנספורמציה ליניארית,

ב). מצא בסיס וממד של $\operatorname{Im} T$ ו- $\operatorname{Ker} T$.

7). תהי $T:R^2 \to R^2$ היא טרנספורמציה ליניארית : $T(0,1)=(1,4)$ ו- $T(1,2)=(2,3)$.
מצא את $T(x,y)$.

8). $T:R^4 \to R^3$ טרנספורמציה ליניארית מוגדרת :

$$[T]_{E_3}^{E_4}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 5 & -2\\ 3 & 8 & 13 & -3\end{pmatrix}$$

כאשר E_4 זה בסיס סטנדרטי ב- R^4 ו- E_3 זה בסיס סטנדרטי ב- R^3 .
מצא את בסיס וממד של $\operatorname{Im} T$ ו- $\operatorname{Ker} T$.

9). יהי $T: M_{n\times n}(F) \to M_{n\times n}(F)$ מוגדר : $T(A) = AB - BA$ כאשר $B \in M_{n\times n}(F)$ מטריצה נתונה.
האם T טרנספורמציה ליניארית?

10). $T: C^3 \to C^3$ אופרטור ליניארי מוגדר : $Te_1 = (1,0,i)$, $Te_2 = (0,1,1)$ ו- $Te_3 = (i,1,0)$ כאשר $\{e_1,e_2,e_3\}$ בסיס סטנדרטי ב- C^3. האם T הפיך?

11). $T: R^3 \to R^3$ אופרטור ליניארי מוגדר : $T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$.
הוכח כי T הפיך. מצא את T^{-1}. חשב את $(T^2 - I)(T - 3I)$.

12). יהי $T: M_{n\times n}(C) \to M_{n\times n}(C)$ אופרטור ליניארי מוגדר :
$T(A) = BA$ כאשר $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.
מצא את הבסיס ואת המימד של $\operatorname{Im} T$ ו- $KerT$. חשב את T^2.

13). הוכח או הפרך: (U,V,W מרחבים וקטוריים)

א) אם $T: V \to V$ ט"ל ו- $KerT = \operatorname{Im} T$ אז $\dim(V) = 2n$ (מספר זוגי).

ב) אם $T: V \to V$ ט"ל ו- $T^2 = T$ אז T הפיכה.

ג) אם $T: V \to V$ ט"ל ו- $KerT = \{O\}$ אז T הפיכה.

ג) אם $S: R^3 \to R^2$ ט"ל ו- $T: R^2 \to R^3$ ט"ל אז TS לא הפיכה.

ד) אם $T: V \to W$ ו- T היא טרנספורמציה ליניארית "על" אז היא "חד-חד" ערכית.

ו) אם $S: U \to V$ ו- $T: V \to W$ שתי טרנספורמציות ליניאריות ו- B_1, B_2, B_3 בסיסים סדורים למרחבים U,V,W בהתאמה, אז $[TS]_{B_3}^{B_1} = [T]_{B_3}^{B_2}[S]_{B_2}^{B_1}$.

14). תהי $T: R^3 \to R^2$ טרנספורמציה ליניארית מוגדרת ע"י $T(x,y,z) = (x+y, 2z-x)$.
מצא $[T]_{B_1}^{B_2}$ כאשר:

א). B_1 הוא הבסיס הסטנדרטי ב- R^3 ו- B_2 הבסיס הסטנדרטי ב- R^2,

ב). $B_1 = \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ ו- $B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$.

15). יהי $T:R^3\to R^3$ אופרטור ליניארי מוגדר ע"י המטריצה

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&3&4\end{pmatrix}.$$

מצא את $KerT$ ו- $\operatorname{Im}T$.

16). יהי $T:R^2\to R^2$ אופרטור ליניארי מוגדר ע"י $T(x,y)=(-y,x)$.

א). מצא את $[T]_E^E$, ב). מצא את $[T]_B^B$ כאשר $B=\{(1,2),(1,-1)\}$.

ג). הוכח כי האופרטור $(T-\alpha I)$ הפיך עבור כל $\alpha\in R$.

17). יהי $T:R^3\to R^3$ אופרטור ליניארי מוגדר ע"י

$T(x,y,z)=(3x+z,-2x+y,-x+2y+4z)$.

א). מצא את $[T]_E^E$,

ב). מצא את $[T]_B^B$ כאשר $B=\{(1,0,1),(-1,2,1),(2,1,1)\}$.

ג). הוכח כי T הפיך ומצא את T^{-1} .

18). יהי V מרחב ליניארי מעל F . $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס סדור ב- V .

$T:V\to V$ אופרטור ליניארי מוגדר ע"י $Tv_i=v_{i+1}$, $i=1,...,n-1$, $Tv_n=0$

א). מצא את $[T]_B^B$,

ב). הוכח כי $T^n=0$ ו- $T^i\neq 0$ עבור $i=1,...,n-1$,

19). תהו $B=\{(1,3),(2,5)\}$ בסיס סדור ב- R^2 ,

$T:R^2\to R^2$ אופרטור ליניארי עם מטריצת האופרטור בבסיס הסטנדרטי $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=[T]_E^E$.

מצא את $[T]_B^B$.

20). תהו $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ בסיס סדור ב- R^2 ,

$T:R^3\to R^3$ אופרטור ליניארי מוגדר ע"י $T(x,y,z)=(x+2y-3z,0,2x-y+5z)$

מצא את $[T]_B^B$.

טרנספורמציה ליניארית, מטריצת טרנספורמציה   תרגיל 9

21). יהי $V=\{f:R\to C\}$ מרחב וקטורי מעל C של כל פונקציות גזירות שלוש פעמים מ- R ל- C.

א). הוכח כי קבוצת הוקטורים $\{f_1,f_2,f_3\}$ בת"ל כאשר $f_1(x)=1$, $f_2(x)=e^{ix}$, $f_3(x)=e^{-ix}$.

ב). מצא את P מטריצה הפיכה 3×3 של מקדמים $g_i=\sum_{j=1}^{3}p_{i,j}f_j$ $(i=1,2,3)$ כאשר $g_1(x)=1$, $g_2(x)=\cos x$, $g_3(x)=\sin x$.

22). נתונה $D:R_3[x]\to R_3[x]$ טרנספורמציית "גזירה" $D(c+bx+ax^2)=b+2ax$.

א). הוכח כי D היא טרנספורמציה ליניארית,

ב). מצא את בסיס וממד של $\operatorname{Im}T$ ו- $KerT$