

פתרונות לדף מס' 3

□(א.1)

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & | & 1-i \\ 1 & -2i & | & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 1 & | & 1-i \\ 0 & -\frac{1}{2}(1+3i) & | & -3+i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1+i)x_1 + 2i = 1-i \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = 2i \end{cases} \quad \square$$

□(ב)

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & | & 3 \\ 7 & 4 & | & -1 \\ 3 & -10 & | & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 & | & 3 \\ 0 & \frac{41}{5} & | & \frac{26}{5} \\ 0 & -\frac{41}{5} & | & \frac{26}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{41} \\ x_2 = -\frac{26}{41} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{9}{41}, -\frac{26}{41}\right) \quad \square$$

□(ג)

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & | & -8 \\ 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ -2 & 3 & -4 & | & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{R_1 \leftrightarrow R_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 7 & 5 & -1 & | & -8 \\ -2 & 3 & -4 & | & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -7R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ 2R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & -2 & -15 & | & -64 \\ 0 & 5 & 0 & | & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \square$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 + 8 = 8 \Rightarrow x_1 = -2 \\ -4 - 15x_3 = -64 \Rightarrow x_3 = 4 \Rightarrow (-2, 2, 4) \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

□(ד) אין פתרון כ"ז

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{2R_1 + R_2 \rightarrow R_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

□(א) מעל Q, C 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{-1R_1 + R_2 \rightarrow R_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \square$$

$$\begin{cases} x_1 + 2/3 = 3, x_1 = 7/3 \\ x_2 = -2/3 \end{cases} \Rightarrow (7/3, -2/3)$$

□(א) מעל Z₅

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 3 \\ 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{4R_1 + R_2 \rightarrow R_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \square$$

$$\begin{cases} x_1 + 4 = 3, x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (4, 1)$$

(ב) מעל Q, C

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -1R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\{R_2 + R_3 \rightarrow R_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 1/2 + 0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1/2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1/2, -1/2, 0)$$

(ב) מעל Z₅

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ 4R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\{R_2 + R_3 \rightarrow R_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 3 + 0 = 1 \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3, 2, 0)$$

□.3

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & (k-3) & 0 \\ k & -2 & (k-1) \end{array} \right) \Rightarrow \{-kR_1 + R_2 \rightarrow R_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (k-3) & 0 \\ 0 & (k-1)(k-2) & (k-1) \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -(k-3)/(k-2) \\ x_2 = 1/(k-2) \end{cases} \quad k \neq 1, 2 \quad (-(k-3)/(k-2), 1/(k-2))$$

- (א) פתרון יחיד מעל Q : $k \neq 1, 2 \quad (-(k-3)/(k-2), 1/(k-2))$
 (ב) אינסוף פתרונות מעל Q : $k = 1 \quad (2t, t)$
 (ג) אין פתרון מעל Q : $k = 2$

- .4
- (א) לא נכון, דוגמה נגדית: (1, 7) או (3, 3).
 (ב) לא נכון, דוגמה נגדית: (3, 3).
 (ג) לא נכון, דוגמה נגדית: (1, 1).
 (ד) לא נכון, דוגמה נגדית: (1, 1).
 (ה) נכון, הוכחה: אם $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ שני פתרונות ל- $A\bar{x} = \bar{b}$ (ז"א $A\bar{x}_i = \bar{b}, i = 1, 2$) אזי לכל α, β יהי פתרון כאשר $\alpha + \beta = 1$. בדיקה:
 $\square A(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \alpha A\bar{x}_1 + \beta A\bar{x}_2 = (\alpha + \beta)\bar{b} = \bar{b}$