תרגיל 4 - פתרונות

1

(א) נניח בשלילה שקיימים 2 וקטורי אפס שונים - 0 ו-$0'$.

$$0' = 0 + 0' = 0$$

כי 0 אפס. כי $0'$ אפס.

לכן יש וקטור אפס יחיד 0_V.

נוכיח ש $0_F \cdot v = 0_V$ לכל וקטור v:

$$v = 1 \cdot v = (0_F + 1_F) v = 0_F v + 1 \cdot v = 0_F \cdot v + v$$

אקסיומה. חוק הפילוג.

לכן $0_F v = v + (-v) = 0_V$

(ב) יהי $v \in V$.

בתחילה נראה ש $(-1_F) \cdot v$ הינו נגדי ל-v.

$$0_F = 0_F \cdot v = (1_F + (-1)_F) \cdot v = 1_F \cdot v + (-1)_F \cdot v = v + (-1)_F v$$

אקסיומה.

לכן $(-1)_F \cdot v$ נגדי ל-v.

עתה, נניח בשלילה שקיים איבר נוסף w שהוא נגדי ל-v, אם כך:

$$v + w = 0 = v + (-1)_F \cdot v$$

נוסיף $(-1)_F \cdot v$ ל-2 האגפים ונקבל

$$(v + (-1)_F v) + w = (v + (-1)_F v) + (-1)_F v$$

$$\Leftarrow \quad w = (-1)_F v$$

וסיימנו.

(3) (א) U אינו מרחב וקטורי

דוגמא נגדית - $(1,0,0,0) \in U$

אבל $5 \cdot (1,0,0,0) \notin U$ ואין סגירות תחת כפל בסקלר.

(ב) U הוא מ"ו

U אינה ריקה כי $\vec{0} \in U$

סגירות בחיבור - נניח $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in U$

אזי

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=(a_3+b_3)+(a_4+b_4)$ כי $\begin{cases} a_1+a_2=a_3+a_4 \\ b_1+b_2=b_3+b_4 \end{cases}$

סגירות בכפל בסקלר - $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in U$, $q \in \mathbb{Q}$ אזי

$$q\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa_1 \\ qa_2 \\ qa_3 \\ qa_4 \end{pmatrix}$$

ו- $qa_1+qa_2=qa_3+qa_4$ כי $a_1+a_2=a_3+a_4$

(ג) U תת מרחב של V (נפתר בכיתה)

(ד) U אינו תת מרחב

דוגמא נגדית - $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$ אבל $-2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin U$

ואין סגירות תחת כפל בסקלר.

(4) (ב) (1) P_1 אינו תת מרחב של $F(t)$

(2) P_2 אינו תת מרחב

דוגמא נגדית - $p_1(t)=t^n$, $p_2(t)=-t^n$

אזי $p_1(t), p_2(t) \in P_2$ אבל $p_1(t)+p_2(t) \notin P_n$

אין סגירות בחיבור.

(3) P_3 אינו תמ"ו כי $p(t)\in P_3$

אז $\vec{0} = p(t)$ ($\vec{0}$ הוא פולינום האפס)

ועבור $\vec{0}$: $\vec{0}(t)+\vec{0}(-t)=0+0=0$ לכן $\vec{0}\notin P_3$

ואין סגירות תחת כפל בסקלר.

(4) P_4 תת מרחב וקטורי

P_4 אינו ריק למשל $p(t)=(t-a)(t-b)=t^2-(a+b)t+ab$

איבר ב- P_4

סגירות בחיבור: יהיו $p_1(t), p_2(t)\in P_4$ אזי $(p_1+p_2)(t)$

פולינום כי $F(t)$ מ"ו (וסגור תחת חיבור).

$(p_1+p_2)(a)=p_1(a)+p_2(a)=0+0=0$

$(p_1+p_2)(b)=p_1(b)+p_2(b)=0+0=0$

לכן $(p_1+p_2)\in P_4$

סגירות בכפל בסקלר: יהיו $p(t)\in P_4$, $c\in F$

$(cp)(t)$ פולינום ב- $F(t)$ ($F(t)$ מ"ו).

$(cp)(a)=c\cdot p(a)=c\cdot 0=0=c\cdot 0=c\cdot p(b)=(cp)(b)$

לכן $(cp)\in P_4$

5 (א) ~~צריך שהניח~~ בהנחה ש- $F=\mathbb{R}$ (אחרת "אין משמעות לחלק מהסעיפים)

(ג) W_1 אינו תת מ"ו של $\mathbb{R}^{2\times 2}$

דוגמה נגדית: $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\in W_1$, $-17\in\mathbb{R}$

$(-17)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17&-17\\-17&-17\end{pmatrix}\notin W_1$

לכן אין סגירות תחת כפל בסקלר.

(2) W_2 הוא תמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times2}$

W_2 אינו ריק, למשל: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ב-W_2

סגירות בחיבור: $\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\in W_2$

$$\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}\in W_2$$

כי $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=0+0=0$

$\mathbb{R}$ שדה   תכונת W_2

סגירות בכפל בסקלר: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W_2$, $t\in\mathbb{R}$

$$t\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ta&tb\\tc&td\end{pmatrix}\in W_2$$

כי $ta+tb=t(a+b)=t\cdot0=0$

$\mathbb{R}$ שדה   תכונת W_2

(3) W_3 תמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times2}$ הוכחה דומה ל-(2).

(4) W_4 אינו תמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times2}$

דוגמא נגדית – ...

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in W_4$ אבל

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\notin W_4$$

כי $1\cdot1-1\cdot1=0$

לכן אין סגירות בחיבור

⑥ (א) $A=\{f \mid f(x^2)=[f(x)]^2\}$

A איננה תת-מ"ו.

דוגמה נגדית - $A \ni f_1(x)=1$

אזי $(f_1+f_1)(x^2)=f_1(x^2)+f_1(x^2)=1+1=2$

$[(f_1+f_1)(x)]^2=[f_1(x)+f_1(x)]^2=[1+1]^2=4$

לכן $f_1+f_1 \notin A$ ואין סגירות בחיבור

(ב) $B=\{f \mid f(3)=1+f(-5)\}$

B איננה תת-מ"ו

דוגמה נגדית - $g(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$

אם כך, $g(x)\in B$ אבל $(g+g)(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$

ו- $B \not\ni (g+g)(x)$ לכן אין סגירות בחיבור.

(ג) $C=\{f \mid f(0)=f(1)\}$

C הוא תת-מ"ו

C אינו ריק - הפונק' הקבועות נמצאות ב- C

סגירות בחיבור - $f_1,f_2\in C$

$$(f_1+f_2)(1)=f_1(1)+f_2(1)=f_1(0)+f_2(0)=(f_1+f_2)(0)$$

לכן $(f_1+f_2)\in C$

סגירות בכפל בסקלר - $f\in C$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$$(\alpha f)(1)=\alpha\cdot f(1)=\alpha\cdot f(0)=(\alpha f)(0)$$

לכן $(\alpha f)\in C$

(ד) הקב' הנ"ל תמ"ו של V.

(ה) הקב' הנ"ל תמ"ו של V.

(7) קודם נמצא את הפתרונות -

נדרג את המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 6 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 6 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 9R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3, x_4, x_5 – משתנים חופשיים.

$$x_2 = -x_4 + 2x_5$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_3 + x_5$$

עכשיו נרשום את הפתרון בעזרת הווקטורים מהצורה

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_3 + x_5 \\ -x_4 + 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_5 \\ 2x_5 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר מרחב הפתרונות הוא $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

והתשובה היא: $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(8) (1) נראה ש- W_1+W_2 תמ"ו של V

W_1+W_2 אינו ריק – W_1 אינו ריק כי הוא תת מרחב.

יהי $u \in W_1$ אזי $u+0 \in W_1+W_2$.

סגירות בחיבור – יהיו $u,v \in W_1+W_2$ אזי $u = u_1+u_2$, $v = v_1+v_2$

כאשר $u_1,v_1 \in W_1$, $u_2,v_2 \in W_2$.

מכיון ש- W_1, W_2 סגורים תחת חיבור אזי

$u_1+v_1 \in W_1$ וגם $u_2+v_2 \in W_2$

$u+v = u_1+u_2+v_1+v_2 = (u_1+v_1)+(u_2+v_2) \in W_1+W_2$ $\Leftarrow$

קומוטטיביות ב-V

סגירות בכפל בסקלר - יהיו $u \in W_1+W_2$, $c \in F$

אזי: $u=u_1+u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$:

W_1, W_2 סגורים תחת כפל בסקלר ולכן $cu_1 \in W_1$, $cu_2 \in W_2$

$cu = c(u_1+u_2) = cu_1+cu_2 \in W_1+W_2$

פילוג ב-V

(2) $W_1 \subseteq W_1+W_2$ כי אם $u \in W_1$

אזי $u=u+0$ ו- $0 \in W_2$ כי הוא ת"מ

ולכן $0+u=u \in W_1+W_2$.

$W_2 \subseteq W_1+W_2$ - כנ"ל.

(3) יהי H ת"מ של V כך ש $W_1, W_2 \subseteq H$

צ"ל: $W_1+W_2 \subseteq H$

יהי $u \in W_1+W_2$ אזי $u=u_1+u_2$; $u_1 \in W_1$ $u_2 \in W_2$

אבל $u_1, u_2 \in H$ ומסגירות בחיבור $u=u_1+u_2 \in H$

מש"ל.

(10) בקומה ל - (7)

נרשום בצורה מטריציונית ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2-R_1]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

אז כך , x_3, x_4, x_5 משתנים חופשיים.

$$x_1 = -x_2 + x_3 + x_5 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5 + x_3 + x_5 =$$

$$3x_2 = x_3 + 2x_4 + 4x_5$$

$$= \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 2\frac{1}{3}x_5 \qquad , \quad x_2 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 2\frac{1}{3}x_5 \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{C} \right\} =$$ אוסף הפתרונות הוא

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ והתשובה היא :