פתרונות - תרגיל 6

(1) נדרג את המטריצה $(v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&4&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&1&4&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&4&2\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&4&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{R_4\leftarrow R_4+4R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

בכל שורה ובכל עמודה יש איבר מוביל, לכן $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ מהווים בסיס.

עכשיו נמצא את הקורדינטות של $e_1,\dots,e_4$. נדרג את

כולם בו"ז בעזרת הרגילה. כלומר נדרג את

המטריצה $(v_1\ v_2\ v_3\ v_4\,|\,e_1\ e_2\ e_3\ e_4)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&1&4&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xleftrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&1&4&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xleftrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&-1&1&0&0\\0&1&4&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xleftrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&-1&1&0&0\\0&0&4&2&0&0&-1&1\end{array}\right)\xleftrightarrow{R_4\leftarrow R_4+4R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&2&-4&4&-1&1\end{array}\right)$$

ולכן

$$[e_1]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\quad [e_2]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$[e_3]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad [e_4]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(נפתר בכיתה) ②

$$[V]_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}i \end{pmatrix}$$

③

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c+a-2b \end{pmatrix}$$

④

$$W = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

במקרה של 2 וקטורים, די לראות מתי 2 וקטורים בת"ל

זה מבלי לדרג. [הוקטור הימני אינו כפולה של השמאלי בגלל

הקואורדינטה האמצעית. הוקטור השמאלי אינו כפולה של הימני

כי אז גם הקואורדינטה האמצעית קובעת שצריך להכפיל ב-0

וזו סתירה כי הקואורדינטה הראשונה/השלישית בוקטור השמאלי

שונה מ-0]

נדרג את המטריצה $(u_1\ u_2\ v_1\ v_2) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+i \\ 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & i & -1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & i+1 \\ 0 & i-1 & -1 & -i \\ 0 & 1+i & i & -1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{-1-i}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 1+i & i & -1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (1+i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1+i}{2}(1+i) = \frac{1+2i-1}{2} = i \\ \frac{-1+i}{2}(1+i) = \frac{-1-i+i-1}{2} = -1 \end{array}\right]$$

מ-2 העמודות הראשונות, רואים ש- u_1, u_2 בת"ל

מכך שבעמודות 3 ו-4 אין איבר מוביל רואים ש

$$v_1, v_2 \in Span\{u_1, u_2\}$$

$\Longleftarrow$ $B_1 = \{u_1, u_2\}$ בסיס ל-W.

לשאלה מטריצה, נמצא את הקואורדינטות:

$$c_1 = 1 - \left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \qquad , \quad c_2 = \frac{1+i}{2}$$

$$[v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 1+i - \left(\frac{-1+i}{2}\right) = 1+i + \frac{1-i}{2} = \frac{3+i}{2} \qquad c_2 = \frac{-1+i}{2}$$

$$[v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$

(5) נשתמש באיזומורפיזם $\mathbb{R}_3[t] \cong \mathbb{R}^3$

נעבור לווקטורי הקואורדינטות:

$$p_1(t) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_2(t) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3(t) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

קל לראות ששלושת הווקטורים בת"ל - המטריצה כבר בצורה מדורגת

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(t) \longmapsto \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הקואורדינטות של $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ בבסיס שמעלה

(האיזומורפיזם שומר על צירופים לינאריים, לכן אלו בדיוק הקואורדינטות המבוקשות)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & c_0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \end{array}\right)$$

$$x_3 = c_2$$

$$x_2 = c_1 - 2\alpha c_2$$

$$x_1 = c_0 - \alpha(c_1 - 2\alpha c_2) - \alpha^2 \cdot c_2 =$$

$$= c_0 - \alpha c_1 + 2\alpha^2 c_2 - \alpha^2 c_2 = c_0 - \alpha c_1 + \alpha^2 c_2$$

ולכן

$$[f(t)]_B = \begin{pmatrix} c_0 - \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 \\ c_1 - 2\alpha c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

⑥ שאלה דומה מאוד ל- ⑤

$$[V]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-(1+i)x_2 - i x_3 \\ \frac{4b+4a-8c+i(2b-8a-4c)}{20} \\ \frac{-2c-4b+6a+i(-2a-2b-6c)}{10} \end{pmatrix}$$

⑦ $[u_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [u_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [u_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

קל לראות שכל שלושת הוקטורים אלה הם בת"ל מעל $\mathbb{Z}_5$

לכן גם $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל ב- V.

מכיוון ש $\dim V=3$ אזי $\{u_1,u_2,u_3\}$ בסיס.

$$[V]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} V_1 \\ 2V_2 \\ 4V_4 \end{pmatrix}$$

חישוב זה, נכון אפילו לעשות בעל פה –

הקורדינטה השלישית (בבסיס B_1) חייבת להיות 4

$\Leftarrow$ הקורד' השניה חייבת להיות -2

$\Leftarrow$ " הראשונה " " -1 ואז כך

$$[V]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

⑧ פתרון בכיתה.

⑨ שאלה, כמו ב- ⑤ $\qquad \mathbb{R}_4[x] \cong \mathbb{R}^4$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x-2) \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x-2)^2 \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x-2)^3 \mapsto \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x-2)^3 = (x^2-4x+4)(x-2) = x^3-4x^2+4x-2x^2+8x-8 =$$
$$= x^3-6x^2+12x-8$$

קל לראות שוקטורים אלה בת"ל ב- $\mathbb{R}^4$ ולכן

הווקטורים המקוריים בת"ל ב- $\mathbb{R}_4[x]$, מכיוון ש $\dim \mathbb{R}_4[x]=4$

B בסיס.

$$g(x) \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$c_4 = -1$

$c_3 = 6 + 6\cdot(-1) = 0$

$c_2 = -5 + 4\cdot 0 - 12\cdot(-1) = -5+12 = 7$

$c_1 = 2 + 2\cdot 7 - 4\cdot 0 + 8\cdot(-1) = 8$

$$[g(x)]_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(10) קל לראות ש-(א) 3 הווקטורים בת"ל

(ב) 3 הווקטורים פורשים את W

עכשיו נמצא את הקואורדינטות מעבר ל- $\mathbb{R}^4$ ($M_{2\times2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xLeftrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xLeftrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ ולכן

(11) V מ"ו מעל F. $U, W \subset V$ תתי מרחבים

$\dim U = \dim W = n-1$ ($\dim V = n$).

• מקרה (א): $U = W$. אז כך $U+W = U$

לכן $\dim(U+W) = \dim(U \cap W) = n-1$

• מקרה (ב): $U \neq W$ לכן קיים $u \in U$ כך ש $u \notin W$

אם כך, $W \subsetneq W+U$ לכן $\dim(W) < \dim(W+U)$

ומתחייב ש- $\dim(W+U) = n$

• נוסחת המימד - $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

נקבל ש- $\dim(U \cap W) = (n-1+n-1) - n =$

$= 2n-2-n = n-2$

(12) ① נתון ש $U+W \subseteq V$ נקבל

$\dim(U+W) \leq \dim V$

אזי בנוסחת המימד נקבל

$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim(U+W) \leq$

$\leq \dim V < \dim U + \dim W$

• לכן $\dim U + \dim W > \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

אזי $\dim U \cap W > 0 \Rightarrow U \cap W \neq 0$

② נתון כי $\dim(U+W) = \dim(U \cap W) + 1$

אזי $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim(U \cap W) + 1$

$(\dim U - \dim U \cap W) + (\dim W - \dim U \cap W) = 1$

לכן $\dim W - \dim U \cap W = 0$ או $\dim U - \dim(U \cap W) = 0$

$\Downarrow$ $U \cap W = U$ $\quad$ $\Downarrow$ $U \cap W = W$

$U \subseteq W$ או $W \subseteq U$