פתרונות תרגיל 7

(1)

$$A^2=\begin{pmatrix}9&2&14\\3&2&6\\8&4&15\end{pmatrix},\qquad B^3=\begin{pmatrix}-2&-3&0\\1&2&0\\-4&24&-8\end{pmatrix}$$

$$C^4=\begin{pmatrix}1&0\\-15&16\end{pmatrix}\qquad DC=\begin{pmatrix}17&-10\\-3&2\\7&-4\end{pmatrix}$$

$$CD^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\-4&2&-1\end{pmatrix}\qquad (DC)^T=\begin{pmatrix}17&-3&7\\-10&2&-4\end{pmatrix}$$

$$C^TD^T=\begin{pmatrix}17&-3&7\\-10&2&-4\end{pmatrix}\qquad AE=\begin{pmatrix}10\\4\\10\end{pmatrix}$$

$$(AB)D=A(BD)=\begin{pmatrix}-18&-49\\-10&-23\\-26&-62\end{pmatrix}\qquad f(C)=\begin{pmatrix}1&0\\9&-8\end{pmatrix}$$

(2) (א) B מסדר 3×2

(ב) B מסדר 2×3

(3) נניח $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&0\\b_3&0\end{pmatrix}$$

מתי $\begin{pmatrix}b_1&b_2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&0\\b_3&0\end{pmatrix}$?

כאשר $b_2=b_3=0$

לכן $B=\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_4\end{pmatrix}$ b_1,b_4 כלשהם.

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n \geq 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \vec{0} \quad n \geq 3$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = ?$$

זוהי מטריצה אלכסונית, לכן, מעלים רק את איברי

האלכסון שלו בחזקה, כלומר

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{n אי-זוגי} \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{n זוגי} \end{cases}$$

(5)

(א) $P(A) = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(ב) $P(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ג) $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ (א) ⑥

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ (ב)

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ (ג)

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 4\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$$ (ד)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ i & i & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & i & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_3\leftarrow R_3+R_1]{R_2\leftarrow R_2-iR_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & i+1 & 1-i & -i & 1 & 0\\ 0 & -1+i & 1+i & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$ (ה)

$$\xLeftrightarrow[R_2\leftarrow R_2\frac{1-i}{2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & i & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i & \frac{-1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0\\ 0 & -1+i & 1+i & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_3\leftarrow R_3+(-1+i)R_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & i & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & i & 1\end{array}\right)$$

לכן A אינה הפיכה!

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_2\leftarrow R_2-3R_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -3 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_2\leftarrow -\frac{1}{7}R_2]{}$$ ⑦

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_1\leftarrow \frac{1}{2}R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_2\leftarrow \frac{1}{3}R_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_3\leftarrow R_3-5R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -15 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{3}R_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\xLeftrightarrow[R_1\leftarrow R_1-3R_3]{R_2\leftarrow R_2+4R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3\frac{1}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ואם כך ;

$$AX = D \iff$$

$$X = A^{-1}D = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & 2\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$XB = D$$

$$X = DB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$AXB = D$$

$$AX = DB^{-1} \iff$$

$$X = A^{-1}DB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \iff$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{15}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{14} - \frac{10}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{5}{14} - \frac{30}{21} & \frac{15}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6-10}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{7\frac{1}{2}-30}{21} & \frac{15}{21} \end{pmatrix}$$

$$CX = E$$

$$X = C^{-1}E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{10}{3}+10-\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3}+2-\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{16}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \iff$$

(8) (א) צ"ל: A הפיכה $\iff$ A^T הפיכה

A ריבועית, אם A הפיכה וקטורי העמודות המרכיבים

את A בת"ל. כמו כן, וקטורי השורות של A בת"ל

(אחרת בדרוג נקבל שורת אפסים)

ואם כך, במקרה זה, גם וקטורי השורות והעמודות

של A^T בת"ל ולכן A^T הפיכה, ולהיפך.

(ב) לא נכון! דוגמה נגדית $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(ג) לא נכון! דוגמה נגדית $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

(ד) כן: A,B הפיכות $\Longleftarrow$ AB הפיכה

נכון. עובדה ע"י מכפלת ההופכית - $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(ה) לא נכון! דוגמה נגדית - $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

אבל אז, $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ לא הפיכה

אך $B\neq\vec{0}$

(ו) אם A מטריצת מעבר מבסיס D_1 לבסיס D_2

אז A הפיכה שכן A^{-1} מטריצת מעבר מ-D_2 ל-D_1

ואכן $A^{-1}A=I$ כי

$$A^{-1}A[v]_{D_1}=A^{-1}(A[v]_{D_1})=A^{-1}[v]_{D_2}=[v]_{D_1}$$

והשוויון נכון לכל $[v]=u\in F^n$.

(ז) כן - $(AB)^T=B^TA^T$

AB_{ij} - מכפלת השורה ה-i ב-A בעמודה ה-j ב-B.

לכן $(AB)^T_{ij}$ - מכפלת השורה ה-j ב-A בעמודה ה-i ב-B

$(B^TA^T)_{ij}$ - מכפלת השורה ה-i ב-B^T בעמודה ה-j ב-A^T

לכן $(B^TA^T)_{ij}$ - מכפלת השורה ה-j ב-A בעמודה ה-i ב-B

והשוויון מתקיים.

(9)

(א) הטענה נכונה (הוכחנו בתרגול בקורס).

(ב') כן $A\cdot A^T$ סימטרית.

$(A\cdot A^T)_{ij}$ = מכפלת השורה ה-i ב-A בעמודה ה-j ב-A^T

$\Leftarrow$ $(A\cdot A^T)_{ji}$ = מכפלת " " השורה ה-j ב-A

ולכן $(AA^T)_{ij} = (AA^T)_{ji}$ ולכן הטענה נכונה.

(ג) לא נכון, דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ והן סימטריות

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

אך AB לא סימטרית.

(ד) לא נכון, דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$$

ו-A^2 אינה סימטרית.

(ה) לא נכון, כפי שהוכחנו ש- $(AB)^T = B^TA^T$

כן A,B אך ידוע שבאופן כללי $AB \neq BA$

(ו) הוכחנו בכיתה (הטענה נכונה).

(10) (א) לא נכון! דוגמא נגדית - $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

אבל $A,B\neq\vec{0}$

(ב) נניח: $AB=\vec{0}$, $A\neq\vec{0}$, $B\neq\vec{0}$ עבור A ו- B אינן הפיכות.

הנ"ל נניח בשלילה ש- A הפיכה

נכפיל משמאל את שני האגפים ב- A^{-1} ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot B=IB=B=A^{-1}\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

וקיבלנו $B=\vec{0}$ בסתירה לנתון.

(ג) נניח: $A=A_1A_2\cdots A_k$ אז:

A הפיכה $\iff$ $A_1,\dots,A_k$ הפיכות

כיוון I $\Rightarrow$ [נתון: $A_1,\dots,A_k$ הפיכות]

אם כך, A הפיכה והופכית שלה ע"י מכפלת $A^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$ (הפיכה בסדר הפוך)

כיוון II $\Leftarrow$ [נתון: A הפיכה]

נעזר בעזרת טענה 2 דטרמיננטות:

טענה (א): A הפיכה $\iff$ $\det A\neq 0$

טענה (ב): $\det AB=\det A\cdot\det B$

ולכן, אם נניח בשלילה שקיימת A_i $1\le i\le k$ שאינה הפיכה אזי $\det(A_1\cdots A_k)=\sum_{j=1}^{k}\det A_j=0$

בסתירה לנתון כי $\det A=\det(A_1\cdots A_k)$

(ד) $A^3=0$ צ"ל $A-I$ הפיכה.

$$(I-A)(I+A+A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 =$$

$$= I - A^3 \underset{\text{נתון}}{=} I$$

וגם

$$(I+A+A^2)(I-A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 =$$

$$= I - A^3 = I$$

לכן $I-A$ הפיכה ואז גם $(A-I) = -(I-A)$ הפיכה