שיטות באנליזה מתמטית
תרגיל 10 א

(א) נתון כי $\Im\{f(t)\} = F(w)$. הוכח כי:

1. $\Im\{f(at)e^{iw_0 t}\} = \frac{1}{|a|}F(\frac{w-w_0}{a})$ 2. $\Im\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$

3. $\Im\{f(t)\sin w_0 t\} = \frac{1}{2i}\left[F(w-w_0) - F(w+w_0)\right]$

4. $\Im\{f(t)e^{iw_0 t}t^2\} = -\frac{d^2}{dw^2}F(w-w_0)$

(ב) 1. בדוק כי עבור הפונקציה $(a>0)$ $f(x) = e^{-ax}$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2} \qquad F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{a^2+w^2}$$

הוראה: יש להשתמש בנוסחאות הבאות:

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \qquad F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx$$

2. בעזרת תוצאה של סעיף 1, הוכח כי

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{a^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}, \qquad \int_0^\infty \frac{w\sin(wx)}{a^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

(ג) מצא טרנספורם פוריה (ישיר) של פונקציות הבאות:

1. $(a>0)$ $f(t) = e^{-a|t|}$ 2. $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ (רמז. השתמש בתכונות פוריה)

(ד) מצא טרנספורם פוריה (ישיר) של פונקציות הבאות:

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le d/2 \\ 0, & |t| > d/2 \end{cases}$ 2. $f(t) = t^2 e^{-5|t|}$

(ה) מצא טרנספורם פוריה (ישיר) של פונקציות הבאות:

1. $(a>0)$ $f(t) = e^{-at}u(t-a)$

2. $f(x) = e^{-x^2}$ (מותר להשתמש בנוסחה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$)

3. $f(x) = xe^{-x^2-4x+9}$,   4. $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

(ו) פתור את המשוואות הבאות:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = \frac{1}{x^2+1}$

3. $\int_0^\infty g(t)\sin tx\,dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$

4. $\int_0^\infty f(t)\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\cos(2\lambda t)dt = \exp(-3\lambda)$

5. $f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad g(x) = u(x)e^{-5x}$

תשובות לתרגיל ג10.

$$F(\omega)=F\{f(t)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad f(t)=F^{-1}\{F(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

(ג) 1. $F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$

2. $F(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,a}e^{-a|\omega|}$

(ד) 1. $F(\omega)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\omega}$, $\omega\neq 0$ ו- $F(0)=\frac{d}{\sqrt{2\pi}}$

2. $F(\omega)=\frac{500-60\omega^2}{(25+\omega^2)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(ה) 1. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\exp(-a^2-i\omega a)}{a+i\omega}$

2. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\omega^2/4)$

3. $F(\omega)=-\left(\frac{i\omega}{2}+2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}+2i\omega+13}$

4. $F(\omega)=-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{d^3}{d\omega^3}\left(e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right)$

(ו) 1. $f(t)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-t^2}$

2. $f(t)=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\frac{1}{4}+t^2}=\frac{\pm 2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+4t^2}$

3. $g(t)=\frac{t-\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t^2-1}$, $t>0, t\neq 1$; $g(1)=\frac{1}{2}$

4. $f(t)=\frac{48}{\pi}\cdot\frac{1}{(4t^2+9)(4t^2+1)}$

5. $f(x)=\begin{cases}u(x)e^{-4x}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$