

תרגול 2

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

I. משוואות עם משתנים ניתנים להפרדה

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \text{או} \quad f_1(x) \cdot g_1(y) dx + f_2(x) \cdot g_2(y) dy = 0$$

דוגמאות:

$$1. (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0$$

פתרון א.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-1)dy + ydx}{\sqrt{x}y} = 0 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0$$

$$2\sqrt{y} - \ln|y| + 2\sqrt{x} = C \Leftrightarrow \int \frac{\sqrt{y}-1}{y} dy + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = C \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}-1}{y} dy + \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0$$

ב. האם $x=0$ פתרון? כן, (בדוק!); האם $y=0$ פתרון? כן, (בדוק!)

ג. תשובה: $2\sqrt{y} - \ln y + 2\sqrt{x} = C, x=0, y=0$

$$2. (1+t^2) x' = tx$$

פתרון א.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{x} = \frac{t dt}{1+t^2} \Leftrightarrow (1+t^2) dx = t x dt \\ x \neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+t^2) x' = tx \\ x' = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$x = C\sqrt{1+t^2} \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + \ln|C|$$

ב. האם $x=0$ פתרון? כן, (בדוק!)

ג. תשובה: $x = C\sqrt{1+t^2}$

$$3. y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, y' \cdot (\sin x)^2 \cdot \ln y + y = 0$$

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \cot x + C \Leftrightarrow y' \cdot (\sin x)^2 \cdot \ln y + y = 0 \quad \text{א. פתרון}$$

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \cot x - 1 \Leftrightarrow C = -1 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 1}{2} = \cot \frac{\pi}{4} + C \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln^2 y}{2} = \cot x + C \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

ג. תשובה: $\ln^2 y = 2 \cot x - 2$

$$4. y' = \frac{x-y}{2x-2y+5}$$

פתרון א.

$$\Leftrightarrow 1 - z' = \frac{z}{2z+5} \Leftrightarrow \begin{cases} z(x) = x - y \\ z' = 1 - y' \end{cases} \Leftrightarrow y' = f(x - y) \Leftrightarrow y' = \frac{x - y}{2(x - y) + 5}$$

$$2z - 5 \ln |z + 5| = x + C \Leftrightarrow \left(2 - \frac{5}{z+5} \right) dz = dx \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2z+5}{z+5} dz = dx \\ z \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow z' = \frac{z+5}{2z+5}$$

$$x - 2y - 5 \ln |x - y + 5| = C$$

ב. האם $y = x + 5 \Leftrightarrow z = -5$ פתרון? כן, (בדוק!)

ג. תשובה: $y = x + 5$, $x - 2y - 5 \ln |x - y + 5| = C$

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות ע"י הפרדת משתנים:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $(x + xy^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ | 6. $dr + r \tan \varphi d\varphi = 0, r(\pi) = 2$ |
| 2. $xtx' = 1 - t^2$ | 7. $y' = \cos(x - y)$ |
| 3. $y' = y \sin^2 x, y(0) = e$ | 8. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ |
| 4. $(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0$ | 9. $\cos x \sin y dy - \cos y \sin x dx = 0, y(\pi) = \pi$ |
| 5. $s' \sqrt{5 + t^2} = s$ | 10. $yx' + x = x^2$ |

תשובות:

- | | |
|---|---|
| 1. $\arctan y = \ln \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$ | 6. $r = -2 \cos \varphi$ |
| 2. $x^2 + t^2 - 2 \ln t = C$ | 7. $x + \cot \frac{x-y}{2} = C, y = x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
| 3. $y = e^{0.5x - 0.25 \sin 2x + 1}$ | 8. $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C$ |
| 4. $(1 + x^2)(y^2 - 1) = C$ | 9. $y = x, y = 2\pi - x$ |
| 5. $s = C(t + \sqrt{5 + t^2})$ | 10. $x(1 - Cy) = 1, x = 0$ |

II. משוואות הומוגניות

$$y' = \varphi(y/x)$$

דוגמאות:

1. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

פתרון א.

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow y' = -\frac{1 + 2\frac{y}{x}}{y/x} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{x^2 + 2xy}{-xy} \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$$

$$xt' = -\frac{1 + 2t + t^2}{t} \Leftrightarrow t + xt' = -\frac{1 + 2t}{t} \Leftrightarrow y' = t + xt' \Leftrightarrow y = x \cdot t \Leftrightarrow \frac{y}{x} = t(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln |x + y| + \frac{x}{x+y} = C \Leftrightarrow \ln |1 + t| + \frac{1}{1+t} = -\ln |x| + C \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t dt}{(1+t)^2} = -\frac{dx}{x} \\ t \neq -1 \end{cases}$$

ב. האם $x=0$ פתרון? כן, (בדוק!); האם $y=0$ פתרון? לא, (בדוק!);
 האם $y=-x \Leftarrow t=-1$ פתרון? כן, (בדוק!)

ג. תשובה: $y = -x$, $x = 0$, $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$

2. $y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$

פתרון א.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad y' = \varphi\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \Leftarrow y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \frac{dt}{ds} = \frac{(s+1)+2(t-1)+1}{2(s+1)+(t-1)-1} \Leftarrow \begin{cases} ds = dx \\ dt = dy \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} s = x-1 \\ t = y+1 \end{cases} \text{ נציב}$$

$$s \neq 0, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1+2t/s}{2+t/s} \quad \text{משוואה הומוגנית} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{s+2t}{2s+t}$$

$t/s = u(s)$ נציב

$$\ln|s| = \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\ln|u^2-1| + \frac{\ln|C|}{2} \Leftarrow \begin{cases} \frac{ds}{s} = \frac{2+u}{1-u^2} \\ u \neq 1, u \neq -1 \end{cases} \text{ אוי}$$

$$\Leftarrow (t-s)^3 = C(t+s) \Leftarrow s^2 = \frac{C(u+1)}{(u-1)^3} \Leftarrow s^2 = \frac{C(u+1)^2}{(u-1)^2(u^2-1)} \Leftarrow$$

$$(y-x+2)^3 = C(x+y)$$

ב. האם $x=1 \Leftarrow s=0$ פתרון? לא, (בדוק!)

האם $y=x-2 \Leftarrow t=s \Leftarrow u=1$ פתרון? כן, (בדוק!)

האם $y=-x \Leftarrow t=-s \Leftarrow u=-1$ פתרון? כן, (בדוק!)

ג. תשובה: $y = -x$, $(y-x+2)^3 = C(x+y)$

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות:

1. $(2x-y)dx - (x+y)dy = 0$

4. $(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0$

2. $ts' = s(\ln s - \ln t)$

5. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$

3. $xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0, y(1) = 1$

תשובות:

1. $y^2 + 2xy - 2x^2 = C$

4. $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2, y = x+1$

2. $s = te^{Ct+1}$

5. $\cot \frac{\ln(y/x)}{2} = \ln|Cx|, y = xe^{2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$

3. $y^2 = xe^{(x-y)/x}$