

### תרגול 3

#### משוואות מסדר ראשון (המשך)

משוואה לינארית  $y' + p(x)y = g(x)$

דוגמה :  $x y' + 2y = x^4$

פתרון  $\left\{ \begin{array}{l} y' + 2\frac{y}{x} = x^3 \\ x \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x y' + 2y = x^4$  משוואה לינארית

דרג 1 . א  $y = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0 \Leftrightarrow y' + 2\frac{y}{x} = 0$

ב.

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{x^6}{6} + C \\ y = \frac{M(x)}{x^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{M'}{x^2} = x^3 \Leftrightarrow \frac{M'x^2 - 2xM}{x^4} + \frac{2M}{x^3} = x^3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' + 2\frac{y}{x} = x^3 \\ y = \frac{M(x)}{x^2} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow$$

דרג 2

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{x^2} \\ u' = x^5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v' + 2\frac{v}{x} = 0 \\ u'v = x^3 \end{array} \right. \Leftrightarrow u'v + u\left(v' + 2\frac{v}{x}\right) = x^3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' + 2\frac{y}{x} = x^3 \\ y = u(x) \cdot v(x) \end{array} \right.$$

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{x^2} \\ u = \frac{x^6}{6} + C \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

משוואת ברנולי  $y' + p(x)y = g(x) y^n$  ( $n \neq 0, n \neq 1$ )

דוגמה :  $y' + 2y = y^2 e^x$

פתרון

דרג 1 . א . נשתמש בהצבה  $z = \frac{1}{y^{n-1}}$

$$z' = -\frac{y'}{y^2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 1/y \\ y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow n-1=1, n=2 \Leftrightarrow y' + 2y = y^2 e^x$$

$$z' - 2z = -e^x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x \\ z' = -y'/y^2 \end{array} \right.$$

ב .  $z' - 2z = -e^x$  משוואה לינארית  $\Leftrightarrow z = Ce^{2x} + e^x \Leftrightarrow y(Ce^{2x} + e^x) = 1$

$$\Leftrightarrow u'v + u(v' + 2v) = u^2 v^2 e^x \Leftrightarrow y = u(x) \cdot v(x), \quad y' + 2y = y^2 e^x \quad \underline{\text{דרך 2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = e^{-2x} \\ \frac{du}{u^2} = e^{-x} dx, u \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = e^{-2x} \\ u' = u^2 e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' + 2v = 0 \\ u'v = u^2 v^2 e^x \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}} \Leftrightarrow y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + C} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{e^{-x} + C} \\ y = uv \end{cases}, \quad v = e^{-2x}$$

אם  $u = 0$  או  $v = 0$  אזי  $y = 0$ . האם  $y = 0$  פתרון? כן, (בדוק!)

### משוואות מדויקות וגורם האינטגרציה

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{אם } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \text{ משוואה מדויקת}$$

ב. אם  $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \varphi(x)$  אזי גורם האינטגרציה  $\mu$  נחפש ממשוואה  $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx$

ג. אם  $\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \varphi(y)$  אזי גורם האינטגרציה  $\mu$  נחפש ממשוואה  $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy$

דוגמאות:

1.  $(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$

פתרון  $P'_y = Q'_x \Leftrightarrow P'_y = 3x^2, Q'_x = 3x^2, P = 2x + 3x^2 y, Q = x^3 - 3y^2$

לכן  $(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$  היא משוואה מדויקת.

קיימת פונקציה  $u(x, y) = C$  כך ש-  $u'_x dx + u'_y dy = (2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy$

$$g = -y^3 + C_1, g'(y) = -3y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y = x^3 + g'(y) \Leftrightarrow u = x^2 + x^3 y + g(y) \Leftrightarrow u'_x = 2x + 3x^2 y \\ u'_y = x^3 - 3y^2 \end{cases}$$

תשובה:  $x^2 + x^3 y - y^3 = C$

2.  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$

פתרון  $P'_y \neq Q'_x \Leftrightarrow P'_y = 2y, Q'_x = 0$  אבל  $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = 2 = \varphi(x)$  לכן  $\frac{d\mu}{\mu} = 2dx \Leftrightarrow \mu = e^{2x}$

$\rightarrow e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x} y dy = 0$  משוואה מדויקת ...

תרגילים

I. פתור את המשוואות לינאריות הבאות :

1)  $y' - y \tan x = \sin x$       2)  $t x' + x = t^3, x(2) = 2.5$       3)  $(x + y^2) dy = y dx$

II. פתור את המשוואות ברנולי הבאות :

4)  $xy^2 y' = x^2 + y^3$       5)  $x dx = (x^2 - 2y + 1) dy$       6)  $y' - y \tan x = y^4 \cos x, y|_{x=\pi} = -1$

III. פתור את המשוואות המדויקות הבאות :

7)  $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx = \sqrt{x^2 - y} dy$       8)  $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right) dx = \frac{(x^2 + 1) \cos y}{1 - \cos 2y} dy$

9)  $y^2 \cos(xy) dx + (xy \cos(xy) + \sin(xy)) dy = 0$

IV. מצא גורם אינטגרציה לכל אחת מהמשוואות הבאות ופתור אותן :

10)  $(x^2 + 2x + y) dx - (x - 3x^2 y) dy = 0$       12)  $(x^3 + 3 \ln y) dx - \frac{x}{y} dy = 0$

11)  $y' = \frac{x}{2x^2 y + y^3}$       13)  $x^2 y^2 dx = (1 - x^3 y) dy$

V. פתור את המשוואות הבאות :

14)  $\begin{cases} (x+1)(y y' - 1) = y^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$       17)  $y' - y \sin x = \sin x \cos x$       20)  $y dx - x(y^3 - \ln x) dy = 0$

15)  $x y' - y = x \tan \frac{y}{x}$       18)  $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$       21)  $y' = \frac{2x + 3y - 5}{x + 4y}$

16)  $2x^2 y y' + y^2 = 2$       19)  $(1 + y^2 \sin 2x) dx = 2y(\cos x)^2 dy$

תשובות :

I. 1)  $y = \frac{0.5 \sin^2 x + C}{\cos x}$       2)  $x = \frac{t^3}{4} + \frac{1}{t}$       3)  $x = y^2 + C y, y = 0$

II. 4)  $y^3 = C x^3 - 3x^2$       5)  $x^2 = 2y + C e^{2y}$       6)  $y^3 \cos^2 x (\cos x - 3 \sin x) = 1$

III. 7)  $3x^2 + 2\sqrt{(x^2 - y)^3} = C$       8)  $x^2 + 1 = (C - 4x) \sin y$       9)  $y \sin(xy) = C$

IV.

10)  $x + 2 \ln|x| - \frac{y}{x} + \frac{3}{2} y^2 = C, x = 0$       12)  $y = e^{x^3(C + \ln|x|)}, x = 0$

11)  $4x^2 + 2y^2 + 1 = C e^{2y^2}$       13)  $2x^3 y^3 - 3y^2 = C$

V.

14)  $2x(x+1) = y^2$       17)  $y = -\cos x + 1 + C e^{-\cos x}$       20)  $4y \ln x - y^4 = C$

15)  $C x = \sin \frac{y}{x}$       18)  $x y (C - \ln^2 y) = 1$       21)  $(y - x + 5)^5 (2y + x - 2) = C$

16)  $y^2 = 2 + C e^{1/x}$       19)  $x - y^2 \cos^2 x = C$