

משוואות מסדר 3, הורדת סדר

שאלה 1 – 2012 מועד א'

$$y' \cdot y''' - 3(y'')^2 - \frac{2(y')^5}{y^3} = 0$$

$$y(0) = y'(0) = 1; y''(0) = -1$$

פתרון:

$$\text{נציב } y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p$$

$$p(1) = 1; p'(1) = \frac{y''(0)}{p(1)} = -1$$

$$p(p'' p^2 + (p')^2 p) - 3(p')^2 p^2 - \frac{2p^5}{y^3} = 0 \quad \div p^5$$

$$\frac{pp'' - 2p'^2}{p^3} = \frac{2}{y^3}$$

$$\frac{p^2 p'' - 2p'^2 p}{p^4} = \frac{2}{y^3}$$

$$\left(\frac{p'}{p^2} \right)' = \frac{2}{y^3}$$

$$\frac{p'}{p^2} = -\frac{1}{y^2} + c_1 \quad \text{נבצע אינטגרציה על שני האגפים:}$$

$$c_1 = 0 \quad \text{כעת נציב את הערכים ההתחלתיים בנק' 0: } \frac{-1}{1} = -\frac{1}{1^2} + c_1$$

$$\frac{p'}{p^2} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{dy}{y^2} \quad \int \text{both sides}$$

$$\frac{-1}{p} = \frac{1}{y} + c_2$$

$$-\frac{1}{1} = \frac{1}{1} + c_2 \quad \text{שוב נציב תנאי התחלה ונקבל:}$$

$$c_2 = -2$$

$$-\frac{1}{p} = \frac{1}{y} - 2 = -\frac{2y-1}{y}$$

$$y' = p = \frac{y}{2y-1}$$

$$\frac{2y-1}{y} dy = dx \Rightarrow \int \left(2 - \frac{1}{y}\right) dy = x + c_3 \Rightarrow 2y - \ln|y| = x + c_3$$

$$2 - \ln|1| = 0 + c_3 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_3 = 2$$

כלומר פתרון סופי הוא: $2y - \ln|y| = x + 2$

שאלה 2 – 2012 מועד ב'

$$y''' = 2(y''y + (y')^2)$$

$$y(0) = 1; y'(0) = 1; y''(0) = 2$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p'p; y''' = p''p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב}$$

$$p(1) = 1; p'(1) = \frac{y''(0)}{p(1)} = 2$$

$$p''p^2 + p'^2 p = 2p'py + 2p^2 \quad \div p$$

$$p''p + p'^2 = 2p'y + 2p$$

$$(p'p)' = 2(py)'$$

$$p'p = 2py + c_1$$

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 + c_1 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_1 = 0$$

$$p'p = 2py \quad \div p$$

$$p' = 2y$$

$$dp = 2ydy$$

$$p = y^2 + c_2$$

$$1 = 1^2 + c_2 \quad \text{נציב תנאי התחלה ונקבל:}$$

$$c_2 = 0$$

$$p = y^2 \quad \text{כלומר:}$$

$$y' = y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + c_3$$

$$-\frac{1}{1} = 0 + c_3 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_3 = -1$$

$$\frac{-1}{y} = x - 1$$

$$y = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

שאלה 3 – אוסף שאלות 1

$$y^2(2(y'')^2 - y' y''') = (y')^4$$

$$y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב}$$

$$y^2 [2(pp')^2 - p(p'' p^2 + p'^2 p)] = p^4 \quad / \div p^2$$

$$y^2 [2(p')^2 - (p'' p + p'^2)] = p^2$$

$$y^2 [(p')^2 - (p'' p)] = p^2$$

לכן קיבלנו: $F(y, p, p', p'') = 0$

נבצע את ההצבה הבאה: $p' = z(y)p; p'' = z' p + zp' = z' p + z^2 p$

$$y^2 (zp)^2 - y^2 p(z' p + z^2 p) = p^2$$

$$-y^2 p^2 z' = p^2 \quad / \div p^2$$

$$-y^2 z' = 1$$

$$dz = -\frac{dy}{y^2} \quad \int \text{both sides}$$

$$z = \frac{1}{y} + c_1$$

$$z = \frac{p'}{p} = \frac{y''}{y'} = \frac{1}{y} + c_1$$

$$\frac{1}{1} = 1 + c_1$$

נציב תנאים: $c_1 = 0$

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{y}$$

כלומר:

$$\ln |p| = \ln |y| + c_2$$

$$\ln |y'| = \ln |y| + c_2$$

$$\ln |1| = \ln |1| + c_2$$

נציב תנאים: $c_2 = 0$

$$\ln |y'| = \ln |y|$$

כלומר:

$$y' = y$$

$$y = e^{x+c_3}$$

$$e^0 = 1 = e^{1+c_3}$$

$$c_3 = -1$$

$$y = e^{x-1}$$

שאלה 4 – 2009 מועד א'

$$y''' - \frac{(y'')^2}{y'} - y'' y' + 2(y')^2 y = 0$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 2$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p$$

נציב

$$p'' p^2 + p'^2 p - \frac{p'^2 p^2}{p} - p' p^2 + 2p^2 y = 0 \quad \div p^2$$

$$p'' - p' = -2y$$

נמצא פתרון למערכת ההומוגנית: $p'' - p' = 0$

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1, 0$$

$$p = c_1 e^{1 \cdot y} + c_2 e^{0 \cdot y} = c_1 e^y + c_2$$

נמצא חלק לא הומוגני:

$$\tilde{p} = y(ay + b) = ay^2 + by$$

$$\tilde{p}' = 2ay + b; \tilde{p}'' = 2a$$

$$p'' - p' = 2a - 2ay - b = -2y$$

$$2a - b = 0; -2a = -2$$

$$a = 1; b = 2$$

$$\tilde{p} = y(y + 2)$$

כלומר סה"כ:

$$y' = p = c_1 e^y + c_2 + y^2 + 2y$$

נציב תנאי התחלה:

$$1 = y'(0) = c_1 e^0 + c_2 = c_1 + c_2$$

$$y'' = p' p = p' y' \Rightarrow p' = \frac{y''}{y'} = c_1 e^y + 2y + 2$$

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{y''(0)}{y'(0)} = c_1 e^0 + 2 \cdot 0 + 2 = c_1 + 2$$

$$c_1 = 0; c_2 = 1$$

$$y' = 1 + y^2 + 2y = (y + 1)^2 \quad \text{כלומר:}$$

$$\frac{dy}{(y + 1)^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y + 1} = x + c_3$$

$$-1 = -\frac{1}{0 + 1} = 0 + c_3 = c_3 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

כלומר:

$$-\frac{1}{y + 1} = x - 1$$

$$y + 1 = \frac{-1}{x - 1}$$

$$y = \frac{x}{1 - x}$$

שאלה 5 – 2009 מועד ב'

$$\frac{y'''}{y'} - 2 \frac{(y'')^2}{(y')^2} + \frac{2(y')^2}{y^2} = 0$$

$$y(0) = 1; y'(0) = 2; y''(0) = 4$$

פתרון:

נציב $y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p$

$$\frac{p'' p^2 + p'^2 p}{p} - 2 \frac{(p' p)^2}{p^2} + 2 \frac{p^2}{y^2} = 0$$

$$p'' p + p'^2 - 2 p'^2 + 2 \frac{p^2}{y^2} = 0$$

$$\frac{p'' p - p'^2}{p^2} = \frac{-2}{y^2}$$

נציב: $\left[\frac{p'}{p} = z(y) \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{p'' p - p'^2}{p^2} \right]$

$$dz = \frac{-2dy}{y^2} \int \text{both sides}$$

$$\frac{p'}{p} = z = \frac{2}{y} + c_1 \Rightarrow \left[p' = \frac{y''}{y'} \right] \frac{y''}{y'^2} = \frac{2}{y} + c_1$$

נציב תנאי התחלה:

$$\frac{4}{2^2} = \frac{y''(0)}{y'(0)^2} = \frac{2}{y(0)} + c_1 = 2 + c_1$$

$$c_1 = -1$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{2}{y} - 1$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \left(\frac{2}{y} - 1 \right) dy$$

$$\ln |p| = 2 \ln |y| - y + c_2$$

$$\ln |2| = \ln |y'(0)| = 2 \ln |y(0)| - y(0) + c_2 = c_2 - 1$$

$$c_2 = \ln |2| + 1$$

לכן: $\ln |y'| = 2 \ln |y| - y + \ln |2| + 1$

שאלה 6 – מועד א' 2008

$$y' y''' - (y'')^2 + (y')^2 y'' = 2e^y (y')^3$$

$$y(0) = 0; y'(0) = y''(0) = 1$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב}$$

$$p(p'' p^2 + p'^2 p) - (p' p)^2 + p^2 p' p = 2e^y p^3 \quad \div p^3$$

$$p'' + p' = 2e^y$$

$$z(y) = p'; z'(y) = p''$$

$$z' + z = 2e^y$$

נפתור הומוגנית: $z' + z = 0$

$$p(p'' p^2 + p'^2 p) - (p' p)^2 + p^2 p' p = 2e^y p^3 \quad \div p^3$$

$$p'' + p' = 2e^y$$

$$z(y) = p'; z'(y) = p''$$

$$\frac{dz}{dy} = -z \Rightarrow dy = \frac{dz}{-z}$$

$$y + \tilde{c}_1 = -\ln |z|$$

נמצא חלק לא הומוגני:

$$z = c_1(y) e^{-y}$$

$$z' = c_1' e^{-y} - c_1 e^{-y}$$

$$c_1(y) e^{-y} + c_1' e^{-y} - c_1 e^{-y} = z + z' = 2e^y \quad \cdot e^y$$

$$c_1' = 2e^{2y}$$

$$c_1(y) = e^{2y} + c_2$$

$$p' = z = (e^{2y} + c_2) e^{-y} = e^y + c_2 e^{-y}$$

$$p' = \frac{y''}{y'} = e^y + c_2 e^{-y} \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$\frac{1}{1} = e^0 + c_2 e^{-0} \Rightarrow c_2 = 0$$

כלומר: $p' = e^y$

$$y' = p = \int dp = \int e^y dy = e^y + c_3$$

$$1 = y'(0) = e^{y(0)} + c_3 = 1 + c_3 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_3 = 0$$

$$y' = e^y$$

$$-e^{-y} = \int e^{-y} dy = \int dx = x + c \quad \text{לכן}$$

$$-e^{-y(0)} = 0 + c$$

$$c = -1$$

$$e^{-y} = 1 - x$$

$$e^y = \frac{1}{1-x}$$

$$y = \ln \left| \frac{1}{1-x} \right|$$

שאלה 7 – 2008 מועד ב'

$$(y'')^2 y + (y')^2 y'' = yy' y''' - y'(y'')^2$$

$$y(0) = y'(0) = 1; y''(0) = -1$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב}$$

$$(pp')^2 y + p^2 pp' = yp(p'' p^2 + p'^2 p) - p(pp')^2$$

$$p^3 p' = yp'' p^3 - p^3 p'^2 \div p^3$$

$$p' = yp'' - p'^2$$

$$t(y) = p'$$

$$t = yt' - t^2 \div y$$

$$t' - \frac{1}{y} t = \frac{1}{y} t^2 \quad \text{Bernoulli} \div t^2$$

$$\frac{t'}{t^2} - \frac{1}{yt} = \frac{1}{y} \left[z = \frac{1}{t}; z' = \frac{-t'}{t^2} \right]$$

$$-z' - \frac{z}{y} = \frac{1}{y}$$

$$-z' - \frac{z}{y} = 0 \quad \text{נפתור הומוגנית:}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y} \quad \int \text{both sides}$$

$$\ln |z| = -\ln |y| + c_1$$

$$z = \frac{1}{y} \cdot c_1(y); z' = \frac{c_1'(y) - c_1}{y^2}$$

נמצא חלק לא הומוגני:

$$-\frac{c_1'(y) - c_1}{y^2} - \frac{\frac{1}{y} \cdot c_1'(y)}{y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{-c_1'}{y} = \frac{1}{y}$$

$$c_1' = -1$$

$$c_1(y) = -y + c_2$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{t} = z = \frac{-y + c_2}{y} = -1 + \frac{c_2}{y}$$

$$\frac{y''}{y'} = p' = \frac{y}{-y + c_2}$$

$$\frac{-1}{1} = p' = \frac{1}{-1 + c_2}$$

$$-c_2 + 1 = 1 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_2 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{y}{-y} = -1$$

$$p = -y + c_3$$

$$1 = y'(0) = -y(0) + c_3 = c_3 - 1 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_3 = 2$$

$$y' = -y + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$\int \frac{dy}{2 - y} = \int dx$$

$$-\ln |2 - y| = x + c$$

$$0 = -\ln |2 - 1| = 0 + c = c \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$x = -\ln |2 - y| \quad \text{כלומר:}$$

$$-x = \ln |2 - y|$$

$$e^{-x} = 2 - y$$

$$y = 2 - e^{-x}$$

שאלה 8 – אוסף שאלות 2

$$y''' + \frac{y' y''}{y} = \frac{(y')^3}{y} + 2 \frac{(y'')^2}{y'}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב}$$

$$p'' p^2 + p'^2 p + \frac{p^2 p'}{y} = \frac{p^3}{y} + 2 \frac{p'^2 p^2}{p} \quad \div p^3$$

$$\frac{p''}{p} + \left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \frac{p'}{p} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} + 2 \left(\frac{p'}{p}\right)^2$$

$$\left[\frac{p'}{p} = z; \frac{p''}{p} = z^2 + z' \right]$$

$$z' + z^2 + z^2 + \frac{1}{y} z = \frac{1}{y} + 2z^2$$

$$z' + \frac{1}{y} z = \frac{1}{y} \quad \cdot y \Rightarrow (zy)' = z'y + z = 1$$

$$(zy)' = 1$$

$$zy = y + c_1$$

$$\frac{y''}{y^2} = \frac{p'}{p} = z = 1 + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{1}{1^2} = 1 + \frac{c_1}{1} = 1 + c_1 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_1 = 0$$

$$z = 1 \quad \text{כלומר:}$$

$$p' = p$$

$$\ln |p| = y + c_2$$

$$0 = \ln |1| = 1 + c_2 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c_2 = -1$$

כלומר:

$$e^{1-y} = 1-x$$

$$1-y = \ln|1-x|$$

$$y = 1 - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{e}{1-x}\right|$$

$$-e^{1-1} = 0 + c \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$c = -1$$

$$e^{1-y} = 1-x$$

$$1-y = \ln|1-x| \quad \text{כלומר:}$$

$$y = 1 - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{e}{1-x}\right|$$

שאלה 9 – 2007 מועד ב'

$$y' y''' - (y'')^2 - (y')^4 + y(y')^3 + 2(y')^3 = 0$$

$$y(0) = 0; y'(0) = y''(0) = 2$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב}$$

$$p(p'' p^2 + p'^2 p) - p'^2 p^2 - p^4 + y p^3 + 2p^3 = 0$$

$$p'' p^3 - p^4 + y p^3 + 2p^3 = 0 \quad \div p^3$$

$$p'' - p + y + 2 = 0$$

נפתור הומוגנית:

$$p'' - p = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1, -1$$

$$p = c_1 e^y + c_2 e^{-y}$$

$$\tilde{p} = ay + b; \tilde{p}'' = 0$$

$$-ay - b + y + 2 = 0$$

$$a = 1; b = 2$$

$$\tilde{p} = y + 2$$

$$p = c_1 e^y + c_2 e^{-y} + y + 2$$

נציב תנאי התחלה:

$$2 = y'(0) = p(y(0)) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} + 0 + 2 = c_1 + c_2 + 2$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$p' = c_1 e^y - c_2 e^y + 1$$

$$\frac{y''}{y'} = p' = c_1 e^y - c_2 e^y + 1$$

$$\frac{2}{2} = c_1 - c_2 + 1$$

$$c_1 - c_2 = 0$$

סה"כ: $c_1 = c_2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y' = p = y + 2$$

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int dx$$

$$\ln |y+2| = x + c$$

$$y+2 = ce^x$$

$$y = ce^x - 2$$

נציב תנאי התחלה: $0 = ce^0 - 2$
 $c = 2$

כלומר סה"כ: $y = 2e^x - 2$

שאלה 10 – מועד ב' 2006

$$y' y''' = 2(y'')^2$$

$$y(0) = 0; y'(0) = y''(0) = 1$$

פתרון:

נציב $y' = z(x); y'' = z'; y''' = z''$

$$z z'' = 2z'^2$$

נציב כעת: $p = p(z) = z'; z'' = p' p$

$$zpp' = 2p^2$$

$$zp' = 2p$$

$$\frac{dp}{2p} = \frac{dz}{z}$$

$$\ln |p| = 2 \ln |z| + c$$

$$y'' = z' = p = cz^2 = cy'^2$$

נציב תנאי התחלה: $1 = c1^2 = c$

כלומר: $z' = z^2$

$$\frac{dz}{z^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{1}{z} = x + c_2$$

נציב תנאי התחלה: $-1 = -\frac{1}{1} = 0 + c_2 = c_2$

$$\frac{1}{y'} = 1 - x$$

כלומר: $y' = \frac{1}{1-x}$

$$y = -\ln |1-x| + c$$

נציב תנאי התחלה: $0 = y(0) = -\ln |1| + c = c$

כלומר: $y = -\ln |1-x|$

שאלה 11 – אוסף שאלות 3

$$y''' - \frac{(y'')^2}{y'} + (y')^3 - (y^2 + 6)(y')^2 = 0$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 4; y''(0) = 0$$

פתרון:

נציב $y' = p; y'' = p'p; y''' = p''p^2 + (p')^2 p$

$$p''p^2 + p'^2 p - \underbrace{\frac{p'^2 p^2}{p}}_{=0} + p^3 - (y^2 + 6)p^2 = 0 \quad \div p^2$$

$$p'' + p = y^2 + 6$$

נפתור הומוגנית: $p'' + p = 0$ ואז נמצא חלק לא הומוגני.

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$p = c_1 \cos y + c_2 \sin y$$

$$\tilde{p} = ay^2 + by + c$$

$$\tilde{p}'' = 2a$$

$$2a + ay^2 + by + c = \tilde{p}'' + \tilde{p} = y^2 + 6$$

$$a = 1; b = 0; 2a + c = 6 \Rightarrow c = 4$$

$$\tilde{p} = y^2 + 4$$

$$p = c_1 \cos y + c_2 \sin y + y^2 + 4$$

$$4 = y'(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + 0^2 + 4$$

נציב תנאי התחלה:

$$c_1 = 0$$

נמצא c_2 :

$$\frac{y''}{y'} = p' = c_2 \cos y + 2y$$

$$\frac{0}{4} = c_2 \cos 0$$

$$c_2 = 0$$

$$y' = y^2 + 4$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + 4} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2} = x + c$$

$$x = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2} = x$$

$$y = 2 \tan 2x$$

שאלה 12 – אוסף שאלות 3

$$\frac{(y')^4}{y^2} + y' y''' = 2(y'')^2$$

$$y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$$

פתרון:

$$y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p \quad \text{נציב } p$$

$$\frac{p^4}{y^2} + p(p'' p^2 + p'^2 p) = 2p'^2 p^2$$

$$\frac{p^4}{y^2} + p'' p^3 = p'^2 p^2 \quad \div p^2$$

$$\frac{p^2}{y^2} + p'' p - p'^2 = 0 \quad \div p^2$$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{p'' p - p'^2}{p^2} = 0$$

$$\left[z(y) = \frac{p'}{p}; z' = \frac{p'' p - p'^2}{p^2} \right]$$

$$\frac{1}{y^2} + z' = 0$$

$$z' = \frac{-1}{y^2} \Rightarrow \frac{p'}{p} = z = \frac{1}{y} + c$$

$$\text{ולכן } \frac{p'}{p} = \frac{y''}{y'^2} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$1 = 1 + c$$

$$c = 0$$

כלומר:

$$z = \frac{1}{y}$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln |p| = \ln |y| + c_1$$

$$y' = p = y \cdot c_1$$

$$1 = c_1 \quad \text{נציב תנאי התחלה:}$$

$$y' = y \quad \text{כלומר:}$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln |y| = x + c_2$$

$$0 = \ln |1| = 1 + c_2$$

נציב תנאי התחלה: $c_2 = -1$

$$\ln |y| = x - 1$$

$$y = e^{x-1}$$

שאלה 13 – אוסף שאלות 3

$$y' y''' - (y'')^2 - (y')^4 + y(y')^3 + 2(y')^3 = 0$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 2; y''(0) = 2$$

פתרון:

נציב $y' = p; y'' = p' p; y''' = p'' p^2 + (p')^2 p$

$$p(p'' p^2 + p'^2 p) - p'^2 p^2 - p^4 + y p^3 + 2p^3 = 0$$

$$p'' p^3 - p^4 + y p^3 + 2p^3 = 0 \quad \div p^3$$

$$p'' - p = -y - 2$$

נפתור הומוגנית: $p'' - p = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$p = c_1 e^y + c_2 e^{-y}$$

נמצא חלק לא הומוגני:

$$\tilde{p} = ay + b; \tilde{p}'' = 0$$

$$-ay - b = -y - 2$$

$$a = 1; b = 2$$

$$\tilde{p} = y + 2$$

ולכן: $y' = p = c_1 e^y + c_2 e^{-y} + y + 2$

$$\frac{y''}{y'} = p' = c_1 e^y - c_2 e^{-y} + 1$$

נציב בשניהם תנאי התחלה:

$$\frac{2}{2} = c_1 e^0 - c_2 e^{-0} + 1 = c_1 - c_2 + 1$$

$$c_1 = c_2$$

$$2 = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} + 0 + 2$$

$$c_1 = -c_2$$

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ :לכן}$$

$$y' = p = y + 2 \text{ :כלומר}$$

$$\frac{dy}{y+2} = dx$$

$$\ln |y+2| = x + c$$

$$y+2 = ce^x$$

$$y = ce^x - 2$$

$$0 = ce^0 - 2 \text{ :נציב תנאי התחלה:}$$

$$c = 2$$

$$y = 2e^x - 2 \text{ :סה"כ}$$

פתרונות

$$2y - \ln|y| = x + 2 \quad .1$$

$$y = \frac{1}{1-x} \quad .2$$

$$y = e^{x-1} \quad .3$$

$$y = \frac{x}{1-x} \quad .4$$

$$\ln|y'| = 2\ln|y| - y + \ln 2 + 1 \quad .5$$

$$y = \ln\left|\frac{1}{1-x}\right| \quad .6$$

$$y = 2 - e^{-x} \quad .7$$

$$y = \ln\left|\frac{e}{1-x}\right| \quad .8$$

$$2e^x - 2 \quad .9$$

$$y = \ln\left|\frac{1}{x-1}\right| \quad .10$$

$$y = 2 \tan(2x) \quad .11$$

$$y = e^{x-1} \quad .12$$

$$y = 2e^x - 2 \quad .13$$