התמרת פורייה

$$F(\varpi)=\mathscr{F}[f](\varpi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\varpi x}dx.$$

קוסינוס וסינוס התמרת פורייה

$$F_c(\varpi)=\mathscr{F}_c[f](\varpi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\varpi x dx.$$

$$F_s(\varpi)=\mathscr{F}_s[f](\varpi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\varpi x dx.$$

התמרת פורייה הפוכה

$$F^{-1}(x)=\mathscr{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}F(\varpi)e^{i\varpi x}d\varpi$$

$$\overset{def}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}F(\varpi)e^{i\varpi x}d\varpi.$$

אם f רציפה ואינטגרבילית בהחלט ב- R ו- f' רציפה למקוטעין ב- R אז

$$\mathscr{F}^{-1}[F](x)=f(x)$$

<u>מקרה כללי</u> אם f רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט ב- R, אז בכל נקודה $x\in R$ בה קיימות נגזרות חד-צדדיות מתקיים

$$\mathscr{F}^{-1}[F](x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

קוסינוס וסינוס התמרת פורייה הפוכה

$$F_c^{-1}(x)=\mathscr{F}_c^{-1}[F_c](x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\varpi)\cos\varpi x\,d\varpi.$$

$$F_s^{-1}(x)=\mathscr{F}_s^{-1}[F_s](x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\varpi)\sin\varpi x\,d\varpi.$$

אם f רציפה ואינטגרבילית בהחלט ב- R_+ ו- f' רציפה למקוטעין ב- R_+ אז

$$\mathscr{F}_c^{-1}[F_c](x)=f(x)$$
$$\mathscr{F}_s^{-1}[F_s](x)=f(x)$$

<u>מקרה כללי</u> אם f רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט ב- R_+, אז בכל נקודה $x\in R_+$ בה קיימות נגזרות חד-צדדיות מתקיים

$$\mathscr{F}_c^{-1}[F_c](x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

$$\mathscr{F}_s^{-1}[F_s](x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

משפט פלנשרל

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\varpi)|^2d\varpi$$

התמרת פורייה- משפטי יסוד

		$f(x)$	$F(\varpi)$
1	דמיון	$f(ax),\quad a\in R, a\neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\varpi}{a}\right)$
2	הזזת המקור	$f(x+b),\quad b\in R$	$e^{i\varpi b}F(\varpi)$
3	הזזת התמונה	$e^{ibx}f(x),\quad b\in R$	$F(\varpi-b)$
4	מודולציה	$f(x)cos(bx),\quad b\in R$ $f(x)sin(bx),\quad b\in R$	$\frac{F(\varpi-b)+F(\varpi+b)}{2}$ $\frac{F(\varpi-b)-F(\varpi+b)}{2i}$
5	גזירת המקור	$f^{(n)}(x)$	$(i\varpi)^n F(\varpi)$
6	גזירת התמונה	$x^n f(x)$	$i^n F^{(n)}(\varpi)$
7	התמרת פורייה כפולה	$F(x)$	$\frac{f(-\varpi+0)+f(-\varpi-0)}{2}$
		$F(x)$	$f(-\varpi)$ אם f רציפה ב- $(-\varpi)$
8	קונבולוציה במקור	$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$	$\sqrt{2\pi}F(\varpi)G(\varpi)$
9	קונבולוציה בתמונה	$f(x)g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\varpi)*G(\varpi)$
10	דואליות	$\mathscr{F}[f](\varpi)=\mathscr{F}^{-1}[f](-\varpi)$	

התמרת פורייה- פונקציות חשובות

$F(\varpi)$	$f(x)$	
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + \varpi^2}$	$e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a > 0$	1
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\varpi a)}{\varpi}$	$u_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \lvert x\rvert \le a \\ 0, & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	2
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\varpi a} - e^{-i\varpi b}}{i\varpi}$	$u_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \le x \le b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$	3
$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\lvert\varpi\rvert}$	$\frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a > 0$	4
$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\varpi^2}{4a}}$	$e^{-ax^2}, \quad a > 0$	5
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a + i\varpi}$	$e^{-ax} u(x), \quad a > 0$	6
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a - i\varpi}$	$e^{ax} u(-x), \quad a > 0$	7
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b}{(a + i\varpi)^2 + b^2}$	$e^{-ax} \cdot \sin bx \cdot u(x), \quad a > 0$	8
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{a + i\varpi}{(a + i\varpi)^2 + b^2}$	$e^{-ax} \cdot \cos bx \cdot u(x), \quad a > 0$	9
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n!}{(a + i\varpi)^{n+1}}$	$x^n \cdot e^{-ax} \cdot u(x), \quad a > 0$	10