אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 04.07.06
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: <u>מד"ר הנ. ביוטכנולוגיה</u>
מס' הקורס 0201.1.9581
מועד א סמ' ב
משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: <u>פתוח אך אסור להשתמש במחשבון</u>

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות (כל שאלה שווה ל-20 נקודות).
יש לציין את השאלות המיועדות לבדיקה. תשובותיך תהיינה מנומקות ומלאות.

שאלה מס' 1. פתור/ פתורי את המשוואה הבאה:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{2y+x+1}$$

שאלה מס' 2.
מצא/י את הפתרון של משוואה $yy''+(y')^3=y'$ המקיים תנאי התחלה $y'(0)=2$, $y(0)=\sqrt{3}$.

שאלה מס' 3.
א) פונקציות $y_1=(x^2-1)e^x+e^{2x}$ ו- $y_2=(x^2+1)e^x+e^{2x}$ הן שני פתרונות של המשוואה <u>האי-הומוגנית</u> הבאה: $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=(x-3)e^{2x}$.
מצא/י פתרון כללי של המשוואה.
ב) השתמש/י בפתרון של סיף א' כדי לפתור משוואה $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=x^2e^{2x}$.

שאלה מס' 4. מצא/י פתרון כללי של משוואה

$$y^{(4)}-2y''+4y=\sin 2x$$

שאלה מס' 5. מצא/י פתרון כללי של מערכת

$$\begin{cases} x'=x-y+z+2e^t \\ y'=x+y-z+3t^2 \\ z'=2x-y+2 \end{cases}$$

שאלה מס' 6. פתור/ פתורי את הבעיה הבאה בעזרת התמרת לפלס:

$$y''+9y=g(t)+5\delta(t-3\pi/2),$$
$$y(0)=y'(0)=1,$$
$$g(t)=\begin{cases}\sin 2t & t\in[\pi/4,\pi/2], \\ 0 & t\notin[\pi/4,\pi/2].\end{cases}$$

בהצלחה!

(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{2y + x + 1}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y + x + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{matrix} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = X - \frac{3}{5} \\ y = Y - \frac{1}{5} \end{matrix} \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{2X - Y}{2Y + X}$$

$$Y = Xz$$

$$X\frac{dz}{dX} + z = \frac{2 - z}{2z + 1}$$

$$X\frac{dz}{dX} = \frac{2 - z - 2z^2 - z}{2z+1} = -\frac{2z^2 + 2z - 2}{2z + 1}$$

$$X\frac{dz}{dX} = -2 \cdot \frac{z^2 + z - 1}{2z + 1}$$

1) $z^2 + z - 1 = 0 \quad z_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2) $$\frac{(2z + 1)\,dz}{z^2 + z - 1} = -\frac{2dX}{X}$$

$$\frac{d(z^2 + z - 1)}{z^2 + z - 1} = -2\frac{dX}{X}$$

$$\ln|z^2 + z - 1| = -2\ln|X| + C_0$$

$$(z^2 + z - 1)X^2 = C^{\neq 0}$$

$$Y^2 + XY - X^2 = C \quad \longleftarrow \quad 1) + 2)$$

$$\boxed{\left(y + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(x + \frac{3}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \left(x + \frac{3}{5}\right)^2 = C}$$

$$\begin{cases} y y'' + (y')^3 = y' \\ y(0) = \sqrt{3}, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$v = \frac{dy}{dx} \rightarrow y'' = v\frac{dv}{dy}$$

$$y v \frac{dv}{dy} + v^3 = v$$

1) $v = 0 \rightarrow \quad y'(0) \neq 2.$

2) $v \neq 0$

$$y\frac{dv}{dy} = -(v^2 - 1).$$

$$\frac{dv}{v^2-1} = -\frac{dy}{y}$$

$v = \pm 1$
— בגלל תנאי
ההתחלה
לא פתרונות

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)dv = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| = -2\ln|y| + c$$

$$\frac{v-1}{v+1} = \frac{c}{y^2} \longrightarrow x=0: \quad \frac{2-1}{2+1} = \frac{c_0}{3} \rightarrow c_0 = 1$$

$$\frac{v-1}{v+1} = \frac{1}{y^2} \qquad v y^2 - y^2 = v + 1 \qquad v(y^2-1) = y^2+1$$

$$\frac{dy}{dx}(y^2-1) = y^2+1, \quad \left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)dy = dx$$

$$\frac{y^2+1-2}{y^2+1}dy = dx \qquad y - 2\operatorname{arctg} y = x + c_1$$

$x=0$: $\quad \sqrt{3} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3} = c_1$

$$c_1 = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

$$\underline{y - 2\operatorname{arctg} y = x + \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi}$$

א) נתבונן ב- $\tilde{y}_1 = y_2 - y_1 = 2e^x$

ברור ש- $\tilde{y}_1$ פתרון של משוואה הומוגנית

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$$

נמצא עוד פתרון:

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

כאשר $p = -\frac{2x+1}{x}$.

$$-\int p\,dx = \int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = 2x + \ln x$$

$$\tilde{y}_2 = 2e^x \int \frac{e^{2x+\ln x}}{4e^{2x}}\,dx = \frac{e^x}{2} \int x\,dx = \frac{x^2}{4} e^x$$

אז פתרון כללי של משוואה הומוגנית הוא

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 x^2 e^x$$

ופתרון כללי של המשוואה הא-הומוגנית הוא

$$y = y_1 + \tilde{y}$$

ב) נשתמש בווריאציה הפרמטרים:

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x^2 e^x$$

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x^2 e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' (2x + x^2) e^x = \frac{x^2}{x} e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' x^2 = 0 \\ C_1' + C_2' (2x + x^2) = x e^x \end{cases}$$

$$2x C_2' = x e^x \qquad C_2' = \frac{1}{2} e^x \qquad \boxed{C_2 = \frac{e^x}{2} + C_{20}}$$

$$C_1' = -C_2' x^2 = -\frac{x^2}{2} e^x$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{1}{2} e^x (x^2 - 2x + 2) + C_{10}}$$

$$y^{(4)}-2y''+4=\sin 2x$$ 4

$$r^4-2r^2+4=0$$

$$r^2_{1,2}=1\pm i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

$$r_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}},\quad r_2=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

$$r_3=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)},\quad r_4=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)}$$

$$r_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$r_2=\sqrt{\frac{3}{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r_4=-\sqrt{\frac{3}{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{y}=C_1e^{\sqrt{\frac{3}{2}}x}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2e^{\sqrt{\frac{3}{2}}x}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+C_3e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$$

$$2^4(A\cos 2x+B\sin 2x)+2\cdot 2^2(A\cos 2x+B\sin 2x)+$$
$$+4(A\cos 2x+B\sin 2x)=\sin 2x.$$

$$(2^4+2^3+4)B=1 \qquad A=0$$

$$B=\frac{1}{28}$$

$$\hat{y}=\frac{1}{28}\sin 2x$$

$$y=\tilde{y}+\hat{y}.$$

5

$$\begin{cases} x' = x - y + z + 2e^t \\ y' = x + y - z + 3t^2 \\ z' = 2x - y + 2 \end{cases}$$

$$x'' = x' - y' + z' + 2e^t = x' - (x + y - z + 3t^2) + (2x - y + 2) + 2e^t =$$

$$= x' + x - 2y + z + 2 - 3t^2 + 2e^t$$

$$\begin{cases} z - y = x' - x - 2e^t \\ z - 2y = x'' - x' - x + 3t^2 - 2 - 2e^t \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} y = -x'' + 2x' - 3t^2 + 2 \\ z = -x'' + 3x' - x - 3t^2 + 2 - 2e^t \end{cases}}$$

$$x''' = x'' + x' - 2(x + y - z + 3t^2) + (2x - y + 2) - 6t + 2e^t =$$

$$= x'' + x' + (z - y) - (2y - z) - 6t^2 + 2 - 6t + 2e^t$$

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = -2e^t - 6t - 3t^2$$

פתרון כללי של משוואה הומוגנית:

$$\tilde{x} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$$

פתרון פרטי של משוואה לא הומוגנית עם $f_1 = -2e^t$:

$$\hat{x}_1 = Ate^t \longrightarrow A = 1, \quad \hat{x}_1 = te^t$$

פתרון פרטי של משוואה לא-הומוגנית עם $f_2 = -6t - 3t^2$:

$$\hat{x}_2 = At^2 + Bt + C \Longrightarrow A = -\frac{3}{2},\ B = -\frac{9}{2},\ C = -\frac{21}{4}$$

$$\hat{x}_2 = -\frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{2}t - \frac{21}{4}$$

אז

$$\boxed{x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + te^t - \frac{3}{2}\left(t^2 + 3t + \frac{7}{2}\right)}$$

(6)

$$\begin{cases} y''+9y = g(t)+5\delta(t-\frac{3\pi}{2}) \\ g = \begin{cases} \sin 2t & \frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{лпнк} \end{cases} \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$$

$$s^2Y - s - 1 + 9Y = G(s) + 5e^{-\frac{3\pi}{2}s}$$

$$g(t) = \left[H(t-\tfrac{\pi}{4}) - H(t-\tfrac{\pi}{2})\right]\sin 2t =$$

$$= H(t-\tfrac{\pi}{4})\varphi(t-\tfrac{\pi}{4}) - H(t-\tfrac{\pi}{2})\psi(t-\tfrac{\pi}{2})$$

$$\varphi(t) = \sin 2(t+\tfrac{\pi}{4}) = \sin(2t+\tfrac{\pi}{2}) = \cos 2t$$

$$\psi(t) = \sin 2(t+\tfrac{\pi}{2}) = \sin(2t+\pi) = -\sin 2t$$

$$G(s) = e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2+4} \cancel{+} e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y = \underbrace{\frac{s+1}{s^2+9}}_{I} + \underbrace{e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}}_{II} + \underbrace{e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{2}{(s^2+4)(s^2+9)}}_{III} + \underbrace{\frac{5e^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s^2+9}}_{IV}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(I) = \cos 3t + \tfrac{1}{3}\sin 3t$$

$$\mathcal{L}^{-1}(IV) = \frac{5}{3}H(t-\tfrac{3\pi}{2})\sin 3(t-\tfrac{3\pi}{2})$$

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+9}\right).$$

$$\mathcal{L}^{-1}(III) = \frac{2}{5}H(t-\tfrac{\pi}{2})\left(\tfrac{1}{2}\sin 2(t-\tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{1}{3}\sin 3(t-\tfrac{\pi}{2})\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(II) = \frac{1}{5}H(t-\tfrac{\pi}{4})\left(\cos 2(t-\tfrac{\pi}{4}) - \cos 3(t-\tfrac{\pi}{4})\right)$$