

# מבחני דוגמא

23/01/00

תאריך הבחינה:

פתור 5 מבין 6 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה 20 נקודות):

## שאלה 1

חקור הפונקציה  $y = (2x - 1)e^{-2x}$ .  
(תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, אסימפטוטות וגרף של פונקציה).

## שאלה 2

א. מצא נקודות אקסטremום מקומי של הפונקציה  $z = \frac{x+y}{xy} - xy$  (12 נקודות).

ב. חשב האינטגרל  $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 15}$  (8 נקודות).

## שאלה 3

א. חשב האינטגרל  $\int_{-4}^4 e^{-2|x+3|} dx$  (10 נקודות).

ב. (10 נקודות) נתונה פונקציה  $f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2, & x < \frac{1}{2} \\ x^2 + x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

1. האם  $f(x)$  פונקציה רציפה? נמק.

2. מצא צורה אנליטית של פונקציה  $f(x+1)$ .

## שאלה 4

א. מצא (ללא שימוש בכלל לופיטל)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$  (10 נקודות).

ב. מצא  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x$  (10 נקודות).

## שאלה 5

א. פתור מערכת משוואות  $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$  (14 נקודות).

ב. משוואה  $e^{xy^2z^3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  מגדירה  $z$  כפונקציה של  $x$  ו- $y$ .  
מצא  $z'_y, z'_x$  (6 נקודות).

## שאלה 6

א. נתונה פונקצית ביקוש  $x = D(p) = \sqrt{3-p}$  כאשר  $x$  כמות מוצרים,  $p$  מחיר של יחידת המוצר. מצא  $p$  ו- $x$  כך שעבורם הגמישות של  $D(p)$  שווה ל-(-1). האם קיימת פונקציה הפוכה ל- $D(p)$ ? נמק את תשובתך.

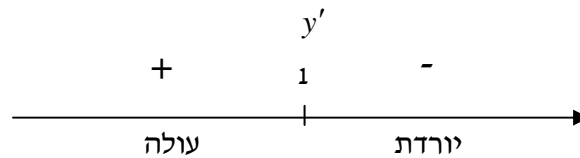
ב. פונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 3,  $f(2, -1) = 4$ . חשב את  $f'_x(8, -4) - 2f'_y(4, -2)$ .

### פתרונות של תרגילי המבחן

#### שאלה 1

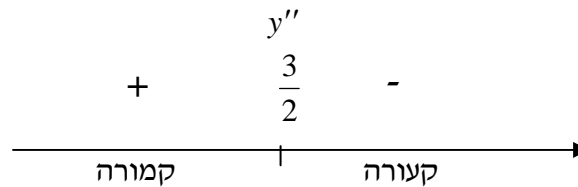
$$y = (2x - 1)e^{-2x}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$y' = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x - 1) = e^{-2x}(4 - 4x) = 0 \Rightarrow 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1$$



$$y_{\max}(1) = e^{-2} \approx 0.14$$

$$y'' = -2e^{-2x}(4 - 4x) - 4e^{-2x} = -2e^{-2x}(6 - 4x) = 0 \Rightarrow 6 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



$$y\left(\frac{3}{2}\right) = 2e^{-3} \approx 0.1, \quad x = \frac{3}{2} \text{ היא נקודת פיתול,}$$

אין אסימפטוטה אנכית.

נניח כי  $y = ax + b$  אסימפטוטה משופעת, אז:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x \cdot e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)'}{(x \cdot e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{2x} + 2xe^{2x}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2e^{2x}} = 0$$

אז  $y = 0$  היא אסימפטוטה אופקית כאשר  $x \rightarrow +\infty$ .

נניח כי  $y = a_1x + b_1$  היא אסימפטוטה משופעת בכיוון  $-\infty$ , אז:

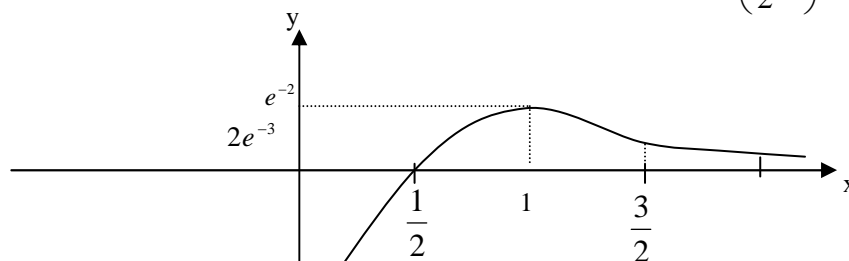
$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 1)e^{-2x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[(2x - 1)e^{-2x}]'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{-2x} - (2x - 1)2e^{-2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}(4 - 4x) = \infty$$

לכן בכיוון  $-\infty$  אין אסימפטוטה.

$$x = \frac{1}{2} \Leftarrow y = 0, \quad y = -1 \Leftarrow x = 0$$

או  $(0,1)$ ,  $(\frac{1}{2},0)$  הן נקודות חיתוך עם הצירים.



## שאלה 2

א.  $z = \frac{x+y}{xy} - xy, \quad xy \neq 0$

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{1}{x^2} - y \\ z'_y &= -\frac{1}{y^2} - x \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} + y = 0 \\ \frac{1}{y^2} + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^2y = 0 \\ 1 + y^2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y - y^2x = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} xy &\neq 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad y = -1$$

או  $M(-1,-1)$  היא נקודה חשודה לקיצון.

$$A = z''_{xx} = \frac{2}{x^3} \Big|_{(-1,-1)} = -2, \quad B = -1, \quad C = z''_{yy} = \frac{2}{y^3} \Big|_{(-1,-1)} = -2$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0, \quad A = -2 < 0$$

מכאן נובע כי  $(-1,-1)$  היא נקודת מינימום מקומי:  $z_{\min}(-1,-1) = -3$ .

ב.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 15} = \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 15} = \int \frac{dx}{(x-4)^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-4-1}{x-4+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-5}{x-3} \right| + C$$

## שאלה 3

א.  $|x+3| = \begin{cases} x+3, & x+3 \geq 0 \\ -(x+3), & x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 e^{-2|x+3|} dx &= \int_{-4}^{-3} e^{2(x+3)} dx + \int_{-3}^4 e^{-2(x+3)} dx = \frac{1}{2} e^{2(x+3)} \Big|_{-4}^{-3} - \frac{1}{2} e^{-2(x+3)} \Big|_{-3}^4 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-14} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-14} \end{aligned}$$

ב. פונקציה רציפה בנקודה  $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$x = \frac{1}{2}$  , ולכן פונקציה אינה רציפה בנקודה  $0 \neq \frac{3}{4}$

$$f(x+1) = \begin{cases} (2x+2-1)^2, & x+1 < \frac{1}{2} \\ (x+1)^2 + (x+1), & x+1 \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} (2x+1)^2, & x < -\frac{1}{2} \\ x^2 + 3x + 2, & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

#### שאלה 4

א. משתמשים בנוסחה  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

ב.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3x\left(1 - \frac{1}{3x}\right)\right)^{\frac{x+1}{3}}}{\left(3x\left(1 + \frac{1}{3x}\right)\right)^{\frac{x+1}{3}}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x\right]^{\frac{x+1}{3x}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x\right]^{\frac{x+1}{3x}}} = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{-\frac{2}{9}}$$

ב.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln^2 x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

#### שאלה 5

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות}$$

נסמן:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$. X = A^{-1}B \quad , A^{-1}AX = A^{-1}B \quad , AX = B \quad \text{זא}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_3 \rightarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 16L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow 16L_2 - L_3 \end{array} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 16 & -16 & 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & 48 & 0 & -21 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_1 \rightarrow 3L_1 - L_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 48 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 48 & 0 & -21 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 5 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/16 & 5/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1 & 5/16 & 1/16 & -3/16 \end{array} \right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -7/16 & 5/16 & 1/16 \\ 5/16 & 1/16 & -3/16 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -7/16 & 5/16 & 1/16 \\ 5/16 & 1/16 & -3/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

זא:  $x=1, y=1, z=-1$  . בדיקה:

$$2-1+3=4, \quad 1+2-2=1, \quad 1-1-1=-1$$

ב. נסמן:  $F = e^{xy^2z^3} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  , זא

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{e^{xy^2z^3} \cdot y^2z^3 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{e^{xy^2z^3} \cdot 3xy^2z^2 - \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{e^{xy^2z^3} \cdot 2xyz^3 - \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{e^{xy^2z^3} \cdot 3xy^2z^2 - \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}.$$

שאלה 6

$$x = D(p) = \sqrt{3-p} \quad . \text{זא}$$

$$\eta_D(p) = p \frac{D'(p)}{D(p)} = p \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{3-p}} \cdot (-1)}{\sqrt{3-p}} = -\frac{p}{\sqrt{3-p}} = \quad .1$$

$$= -1 \Rightarrow p = 2(3-p) \Rightarrow p = 6 - 2p \Rightarrow 3p = 6 \Rightarrow p = 2, \quad x = \sqrt{3-2} = 1$$

2. בדוק שפונקציה  $D(p)$  חד-חד ערכית.

נניח ש-  $D(p_1) = D(p_2)$ , ו-א.ש-  $\sqrt{3-p_1} = \sqrt{3-p_2}$ , אז  $3-p_1 = 3-p_2$  ולכן  $p_1 = p_2$ .  
 ז.א. שפונקציה  $D(p)$  חד-חד ערכית ולכן קיימת פונקציה הפוכה. נמצא אותה.

$$.D(p) \text{ היא פונקציה הפוכה ל- } p = 3 - x^2, \text{ לכן } 3 - p = x^2; \sqrt{3-p} = x$$

ב. פונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 3,  $f(2, -1) = 4$ .

יש למצוא:  $f'_x(8, -4) - 2f'_y(4, -2)$ .

לפי נוסחת אוילר:  $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = 3f(x, y)$ . נציב  $x = 2, y = -1$ , נקבל:

$$2f'_x(2, -1) - f'_y(2, -1) = 3f(2, -1) = 12$$

נגזרות  $f'_x$  ו-  $f'_y$  הן הומוגניות מדרגה 2. לכן

$$f'_x(8, -4) - 2f'_y(4, -2) = f'_x(4 \cdot 2, 4 \cdot (-1)) - 2f'_y(2 \cdot 2, 2 \cdot (-1)) =$$

$$= 4^2 f'_x(2, -1) - 2 \cdot 2^2 f'_y(2, -1) = 16f'_x(2, -1) - 8f'_y(2, -1) = 96$$

10/02/00

**תאריך הבחינה:**

### שאלה 1

א. חשב את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right)^{x+2}$

ב. נתונה פונקציה  $z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ . בדוק שמתקיים השוויון:  $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z$ .

### שאלה 2

א. חשב את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

ב. הוכח שאם  $f[g(x)]$  פונקציה מורכבת, אז גמישות של  $f[g(x)]$  בנקודה  $x$  שווה לגמישות של  $f$  בנקודה  $g(x)$  כפול הגמישות של  $g$  בנקודה  $x$ . כלומר:

$$\eta_{f[g(x)]}(x) = \eta_f(g(x)) \cdot \eta_g(x)$$

### שאלה 3

חקור הפונקציה  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

מצא תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, אסימפטוטות וגרף של פונקציה.

### שאלה 4

א. מצא נקודות חשודות לאקסטרמום של הפונקציה  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  בתנאי  $x^2 + y^2 = 25$ .

ב. נתונה פונקציה  $f(x, y) = x^2 e^y$ . הוכח כי בסביבת הנקודה  $x = 2, y = 0$  מתקיים:  $x^2 e^y \approx 4x + 4y - 4$ . מצא בקירוב ע"י הנוסחה  $1.94^2 e^{0.12}$ .

### שאלה 5

א. חשב האינטגרל הבא או קבע שהוא מתבדר  $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{(x-2)^3}$ .

ב. נתונה פונקצית הביקוש  $D(x) = \frac{5}{2x+1} - \frac{1}{10}$  ופונקצית ההיצע  $S(x) = 0.4x + 0.1$ .

מצא עודף הצרכן בנקודת שיווי משקל (כאשר  $x$  מקיים את המשוואה  $D(x) = S(x)$ ).

### שאלה 6

א. הוכח כי למשוואה  $\ln(x^2 + 3) = x + 1$  ישנו שורש ממשי יחיד.

ב. פתור משוואה מטריציונית  $BXB^{-1} = A$  לגבי מטריצה  $X$ .

מצא  $X$  כאשר:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

## תשובות לתרגילי המבחן

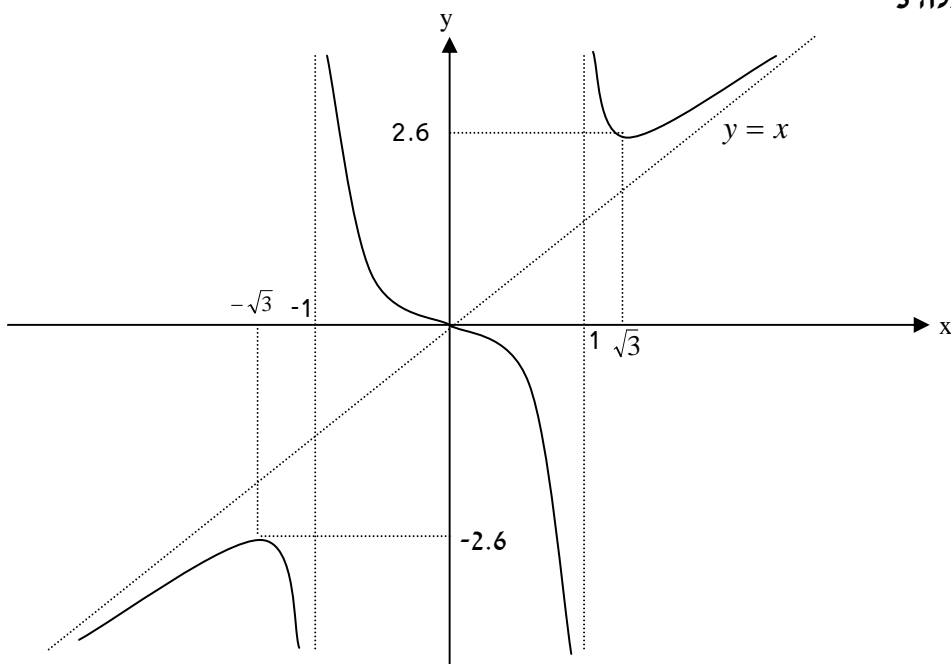
### שאלה 1

א. 1

### שאלה 2

א.  $-\frac{1}{3}$

### שאלה 3



#### שאלה 4

- א.  $z_{\max}(-3, 4) = 125$ ,  $z_{\min}(3, -4) = -75$   
ב.  $x^2 e^y \approx 4x + 4y - 4$  כי  $f(2, 0) = 4$ ,  $f'_x(2, 0) = 4$ ,  $f'_y(2, 0) = 4$ .  $1.94^2 e^{0.12} \approx 4.24$ .

#### שאלה 5

- א.  $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{(x-2)^3} = 2$   
ב. נקודת שיווי משקל  $x_0 = 2$ ,  $p_0 = 0.9$ ,  $\int_0^2 D(x)dx - p_0 x_0 = 2.5 \ln 5 - 2 \approx 2.024$

#### שאלה 6

ב.  $X = B^{-1}AB$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

18/02/00

תאריך הבחינה:

#### שאלה 1

- חקור הפונקציה  $y = \frac{e^x}{x}$ .  
(תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, אסימפטוטות וגרף הפונקציה).

#### שאלה 2

- א. חשב הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$   
ב. מצא האינטגרל  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}$

#### שאלה 3

- א. חשב הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-3} \right)^{\frac{2x-1}{2}}$   
ב. חשב האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

#### שאלה 4

- א. נתונה פונקציה  $z = f\left(\frac{x^2}{y^2}, \frac{y^2}{x^2}\right)$  כאשר  $f(u, v)$  פונקציה כלשהי.  
הראה כי  $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 0$ .



ב. נתונה פונקציה:  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < -1 \\ ax+b, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$ , כאשר  $a$  ו- $b$  פרמטרים לא ידועים.

מצא  $a$  ו- $b$  כך, שפונקציה תהיה רציפה ושרטט גרף של  $f(x)$  עבור הפרמטרים האלה.

### שאלה 5

א. מצא נקודות אקסטremום מקומי של הפונקציה  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ .

ב. נתונה פונקצית ביקוש  $x = D(p) = \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{4}$ . מצא  $p$  ו- $x$  כך שעבורם הגמישות של

$D(p)$  שווה ל-1. האם קיימת פונקציה הפוכה ל- $D(p)$ ?

### שאלה 6

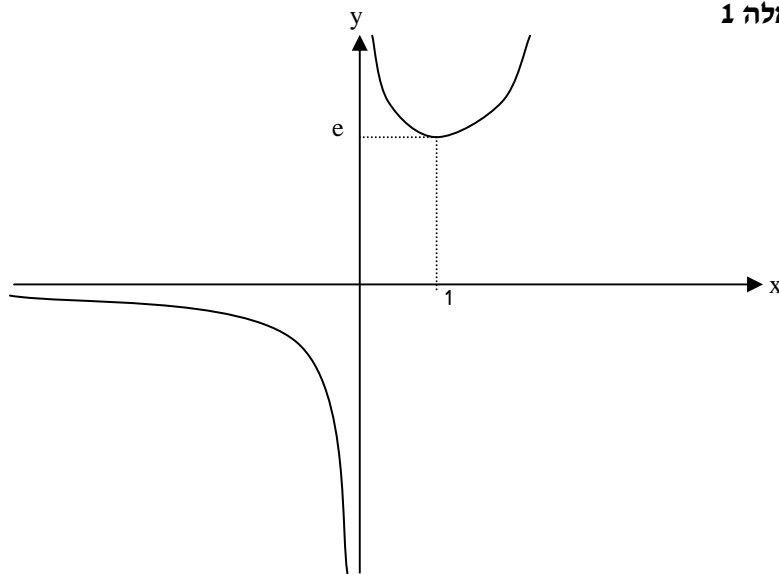
א. פתור את משוואה מטריציונית  $(XB^{-1})^{-1} = A$  לגבי מטריצה  $X$  כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב. פונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 3,  $f(-1, 3) = -1$ ,  $f'_x(3, -9) = 9$ . חשב את  $f'_y(1, -3)$ .

## תשובות לתרגילי המבחן

### שאלה 1



### שאלה 2

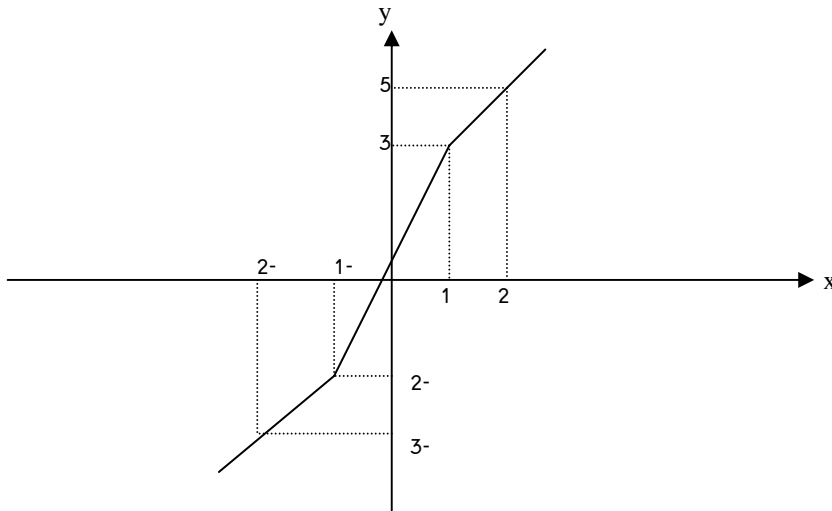
ב.  $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3} + C$

א.  $+\infty$

**שאלה 3**

א.  $e^{5/3}$

ב.  $\frac{1}{2} \ln 3$



**שאלה 4**

ב.  $b = \frac{1}{2}, a = \frac{5}{2}$

**שאלה 5**

א.  $Z_{\min}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{1}{2}e$  .  
 ב.  $x_0 = \frac{1}{2}, p_0 = \frac{1}{3}$  , קיימת פונקציה הפוכה  $D(x) = \frac{5-4x}{12x-3}$

**שאלה 6**

א.  $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

ב.  $f'_y(1, -3) = -\frac{2}{3}$

29/06/00

**תאריך הבחינה:**

**שאלה 1**

א. חשב את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left[ \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

ב. חשב אינטגרל  $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}-1}$

**שאלה 2**

א. הגדר מושג של רציפות של פונקציה עם משתנה אחד בנקודה  $x_0$ .

עבור איזו ערך של  $b$  פונקציה  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ b, & x = 3 \end{cases}$  רציפה בנקודה  $x = 3$

שרטט גרף של  $f(x)$ .

ב. משוואה  $H(x-2z, y-3z) = 0$  מגדירה  $z$  כי פונקציה סתומה של  $x$  ו- $y$

( $H(u, v)$  גזירה לפי  $u$  ו- $v$ ). הוכח כי  $2 \cdot z'_x + 3 \cdot z'_y = 1$

### שאלה 3

חקור פונקציה  $y = \frac{x}{\ln x}$ .

מצא תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, אסימפטוטות וצייר את הגרף.

### שאלה 4

א. חשב את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ .

ב. פונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 4.  $g(x, y)$  הומוגנית מדרגה 2,

$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

1. האם  $h(x, y)$  הומוגנית?

2. חשב  $g(1, 2)$  אם  $h(2, 4) = 32$ ,  $f'_x(1, 2) = -1$ ,  $f'_y(3, 6) = 27$ .

### שאלה 5

א. מצא אקסטרמום מקומי של הפונקציה  $z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$ .

ב. נתונה פונקצית הביקוש  $D(x) = \sqrt{5-x}$  ופונקצית ההיצע  $S(x) = x+1$ . מצא גמישות של  $D(x)$  ועודף הצרכן בנקודת שיווי משקל (כאשר  $x$  מקיים את המשוואה  $D(x) = S(x)$ ).

### שאלה 6

א. פתור מערכת משוואות  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$  (14 נקודות).

ב. נתונה פונקציה  $z = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$ . מצא ביטוי ליניארי שקרוב לפונקציה בסביבת נקודה  $(0, 2)$ .

תשובות למבחן 29/06/00

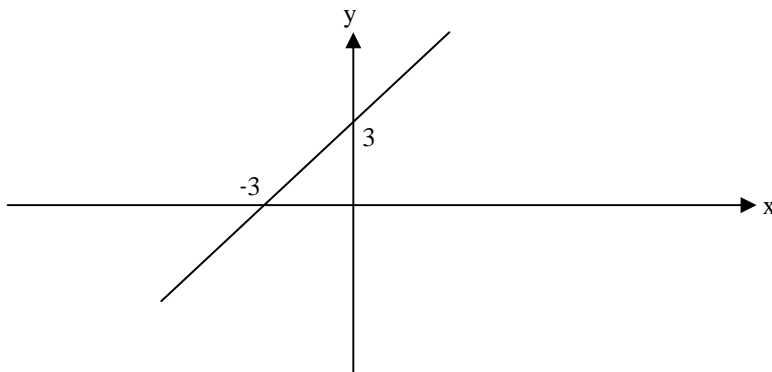
### שאלה 1

א.  $\frac{1}{2}$

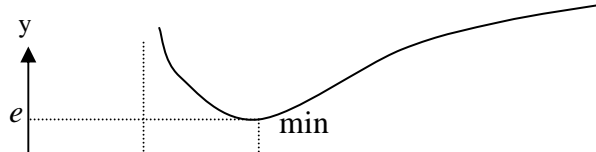
ב.  $6\frac{1}{3}$

### שאלה 2

א.  $b = 6$



### שאלה 3



#### שאלה 4

א.  $e$ .  
ב.  $h$  לא הומוגנית,  $g(1, 2) = 7$ .

#### שאלה 5

א.  $z_{\min}(1, 1) = z_{\min}(-1, -1) = 4$ .  
ב.  $\eta_D(1) = \frac{1}{8}$ , עודף לצרכן שווה ל-  $\frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 11)$ .

#### שאלה 6

א.  $x = 1, y = 1, z = 0$ .  
ב.  $z(x, y) \approx y$ .

19/07/00

תאריך הבחינה:

#### שאלה 1

א. חשב את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{8}{x-2}}$

ב. חשב אינטגרל  $\int \frac{x^2}{(x+1)^2} dx$ .

#### שאלה 2

א. הגדר מושג של רציפות של פונקציה  $f(x)$  ומצא לפי הגדרה נגזרת אם  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

ב. חשב אינטגרל  $\int_{-1}^4 x\sqrt{x+5} dx$ .

#### שאלה 3

חקור פונקציה  $y = \frac{x^3}{\sqrt{3}(x^2 - 9)}$ .

מצא תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, אסימפטוטות וצייר את הגרף.

#### שאלה 4

- א. חשב את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 5x} - 3x)$
- ב. פונקצית הביקוש  $D(p)$  ופונקצית ההיצע  $S(p)$ ,  $p$  - מחיר יחידת מוצר.  
 נתון ש-:  $D(p)$  ו-  $S(p)$  רציפות,  $D(0) > S(0)$  ועבור מחיר מסוים  $p_1 > 0$  קיים  
 $D(p_1) < S(p_1)$ . הוכח שקיים מחיר של שיווי משקל. (רמז: נשתמש במשפט ערך הביניים)

#### שאלה 5

- א. מצא נקודות חשודות לאקסטרמום של הפונקציה  $f(x, y) = xy$   
 עם אילוץ  $4x^2 + 9y^2 = 36$

- ב. הראה שלפונקציה  $z = ye^{x^2 - y^2}$  מתקיים  $\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{z}{y^2}$

#### שאלה 6

- א. פתור משוואה מטריציונית  $(AX^{-1}A^{-1})^{-1} = AB^{-1}$  לגבי מטריצה  $X$ .  
 כאשר:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ב. הראה כי  $\eta_f(x) = \eta_f(x) - \eta_g(x)$ , כאשר  $\eta_f(x)$  גמישות של  $f(x)$  בנקודה  $x$ .

תשובות למבחן 19/07/00

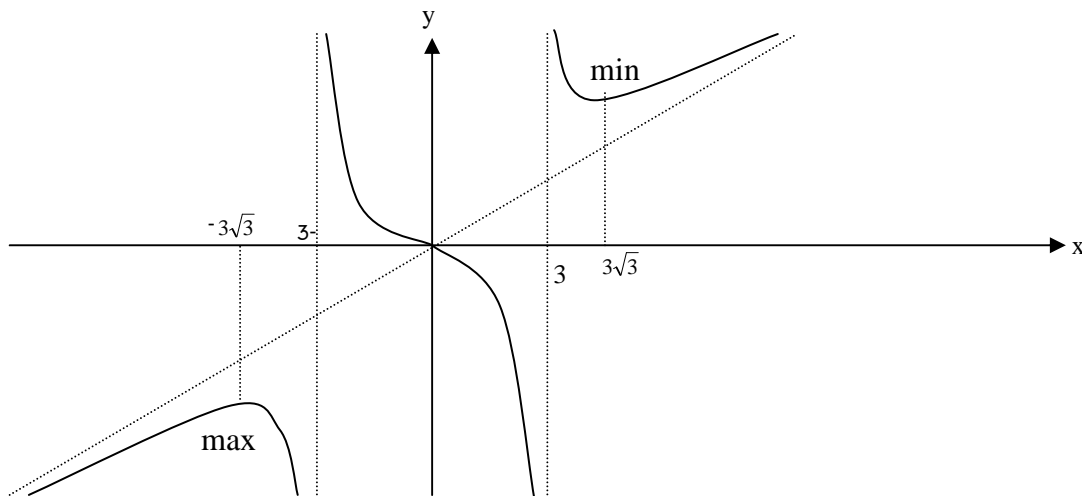
#### שאלה 1

- א.  $e^4$
- ב.  $x - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

#### שאלה 2

- א.  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

#### שאלה 3



שאלה 4

$$\frac{5}{6} .\aleph$$

שאלה 5

$$M_4\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), M_3\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), M_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) .I$$
$$f(M_2) = f(M_3) = -3, \quad f(M_1) = f(M_4) = 3$$

שאלה 6

$$X = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -11 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} .\aleph$$