נוסחאות ומשפטים בסיסיים

גבולות

א. $\lim_{x\to a}[Af(x)+Bg(x)]=A\lim_{x\to a}f(x)+B\lim_{x\to a}g(x)$

ב. $\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

ג. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}\quad\left(\lim_{x\to a}g(x)\neq 0\right)$

גבולות עם מספר e

א. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ב. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$

ג. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ד. $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$

כלל לופיטל

אם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ או $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$, אז מתקיים: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ בתנאי שגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

רציפות

פונקציה $y=f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$, אם $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

משפט ערך ביניים

אם $y=f(x)$ רציפה בקטע $a\le x\le b$ ו- $f(a)\cdot f(b)<0$, אז קיימת הנקודה $x=c$, $a<c<b$, כך ש - $f(c)=0$. אם בנוסף $y=f(x)$ מונוטונית בקטע, אז קיים שורש היחיד של משוואה $f(x)=0$ בקטע הזה.

נגזרת

לפי הגדרה, $y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, כאשר $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

תכונות של נגזרת

א. $(Au+Bv)'=Au'+Bv'$

ב. $(uv)'=u'v+uv'$

ג. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$

ד. אם $y=f(u)$, $u=g(x)$, אז $y'_x=y'_u u'_x$.

טבלת נגזרות

א. $c'=0$ ב. $(x^n)'=nx^{n-1}$ ג. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$

ד. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

נוסחת קירוב ליניארי

אם Δx היא תוספת הקטנה ל - x_0 , אז מתקיים :

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x$$

חקירת פונקציה

א. אם $f'(x) > 0$ בקטע $a < x < b$, אז פונקציה $y = f(x)$ מונוטונית עולה בקטע.
אם $f'(x) < 0$ בקטע $a < x < b$, אז פונקציה $y = f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע.

ב. אם $f'(x_0) = 0$ ונגזרת מחליפה את סימנה בנקודה $x = x_0$ מ – "+" ל – "-", אז בנקודה $x = x_0$ קיים מקסימום מקומי. אם $f'(x_0) = 0$ ונגזרת מחליפה את סימנה בנקודה $x = x_0$ מ – "-" ל – "+", אז בנקודה $x = x_0$ קיים מינימום מקומי. אם נגזרת אינה מחליפה סימן, אז אין נקודת קיצון.
דרך השניה : אם $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, אז $x = x_0$ נקודת מקסימום מקומי. אם $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, אז $x = x_0$ נקודת מינימום מקומי.

ג. אם $f''(x_0) = 0$ ונגזרת שניה מחליפה את סימנה בנקודה $x = x_0$, אז נקודה הזו היא נקודת פיתול. אם נגזרת שניה לא מחליפה את סימנה, אז אין נקודת פיתול.

ד. אם קיים לפחות אחד מהגבולות $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, אז קו ישר $x = x_0$ מהווה אסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה. אסימפטוטה משופעת בכיוון $+\infty$ היא $y = ax + b$, כאשר קיימים גבולות : $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right]$.
אסימפטוטה משופעת בכיוון $-\infty$ היא $y = a_1x + b_1$, כאשר קיימים גבולות :
$a_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - a_1x\right]$.

פונקציה סתומה

א. אם פונקציה סתומה מוגדרת ע"י המשוואה $F(x,y) = 0$, אז $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ בתנאי ש - $F'_y \neq 0$.

ב. אם פונקציה $z = f(x,y)$ מוגדרת ע"י המשוואה $F(x,y,z) = 0$, אז $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$, $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$, בתנאי ש - $F'_z \neq 0$.

כלל שרשרת

אם $z = f(u,v)$ כאשר $u = g(x,y)$, $v = h(x,y)$, אז :

$$z'_x = z'_u\cdot u'_x + z'_v\cdot v'_x, \quad z'_y = z'_u\cdot u'_y + z'_v\cdot v'_y,$$

נוסחאות קירוב ליניארי (פונקציה של שני משתנים)

אם Δx , Δy היא תוספות הקטנות ל - x_0 , y_0 בהתאמה, ו – $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$, אז בסביבת הנקודה (x_0, y_0) מתקיים :

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

או

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

פונקציה הומוגנית

לפונקציה $f(x,y)$ קוראים <u>הומוגנית מדרגה</u> m , אם $f(tx,ty)=t^m f(x,y)$ לכל $t\neq 0$.
לפונקציה הזו מתקיים : $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=mf(x,y)$. אם $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מדרגה m , אז $f'_x(x,y)$ ו - $f'_y(x,y)$ הן פונקציות הומוגניות מדרגה $m-1$.

אינטגרל בלתי מסוים

א. $\int f(x)dx = F(x)+C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x)=f(x)$

ב. $\int [Af(x)+Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$

ג. אם $\int f(x)dx = F(x)+C$, אז $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

טבלת אינטגרלים

א. $\int dx = x+C$

ב. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$

ג. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$

ד. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$

ה. $\int e^x dx = e^x+C$

ו. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

אינטגרל מסוים

א. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

ב. $\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

ג. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a<c<b,$

ד. אם $f(-x)=-f(x)$, אז $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

אינטגרל לא אמיתי

א. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

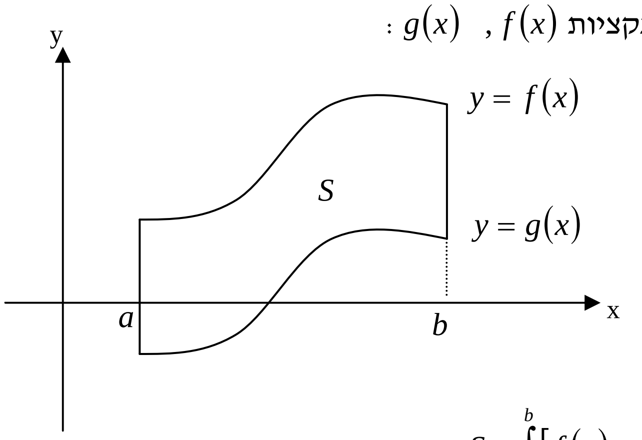
ב. $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

ג. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

אם גבול שווה לאינסוף אז אינטגרל מתבדר, אחרת מתכנס.

שטח

שטח המוגבל ע״י גרפים של שתי פונקציות $f(x)$, $g(x)$:



ניתן לחשב ע״י הנוסחה : $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

עודף לצרכן

נוסחה לחישוב של עודף לצרכן : $\int_0^{x_0} D(x)dx - p_0 x_0$.

אקסטרמום מקומי

נניח ש - $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ ו –

$A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

אם $\Delta > 0$, $A < 0$ אז (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום מקומי של $z = f(x, y)$.

אם $\Delta > 0$, $A > 0$ אז (x_0, y_0) היא נקודת מינימום מקומי של $z = f(x, y)$.

אם $\Delta < 0$ אז (x_0, y_0) היא נקודת אוכף. אם $\Delta = 0$ אז אין תשובה לפי שיטה זו.

אקסטרמום בתנאי

נתונה פונקציה $z = f(x, y)$ ותנאי נוסף המקשר y ו - x : $g(x, y) = 0$. נרכיב את פונקצית לגרנז׳ :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

אז כל הנקודות החשודות לאקסטרמום בתנאי מקיימות את מערכת המשוואות :

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_\lambda = 0$$

מטריצות

למטריצה A^{-1} קוראים מטריצה הפוכה למטריצה ריבועית A , אם מתקיים :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

כאשר E מטריצה יחידה. למציאת את A^{-1} יש להרכיב את מטריצה $(A|\mathrm{E})$ וע״י פעילות אלמנטריות עם שורותיה להביא אותה לצורה $(E|\mathrm{B})$. אז $B = A^{-1}$.

מתקיימת הנוסחה : $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

מערכת משוואות ליניאריות

נתונה מערכת משוואות ליניארית בנעלמים x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

נסמן:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

אז ניתן להציג המערכת בצורה $AX = B$ ומתקיים: $X = A^{-1}B$.