

חדו"א 1 עבודת בית מספר 1

1.1 הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית את הנוסחאות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.2 חשב באמצעות הנוסחאות הנ"ל את הסכומים הבאים:

(א) $1^2 + 7^2 + 13^2 + \dots + (6n-5)^2$;

(ב) $1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n-3)^3$

2. חשב את הסכומים הבאים:

(א) $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)}$;

רמז: $\frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right)$

(ב) $\frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 22} + \dots + \frac{1}{(6n-2) \cdot (6n+4)}$

3. הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית את נוסחת הבינום של ניוטון:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot A^{n-k} \cdot B^k$$

והוכח בעזרתה את הנוסחאות הבאות:

(א) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$;

(ב) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ כאשר $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

4. הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית את האי-שוויונות הבאים:

(א) $(n > 1) \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$;

(ב) $(n > 1) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

(ג) $(n > 2) \quad 5^n + 12^n < 13^n$.

5. פתור את המשוואות הבאות:

(א) $|x-3| + |x| + |x+3| = 5$;

(ב) $|x^2-3| + |x^2-5x| = 60$

6. פתור את האי-שוויונות הבאים:

(א) $|x+1| + |x+2| + |x+3| \geq 4$

(ב) $\left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$

7. מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות הבאות:

(א) $y = (x-2) \cdot \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$

(ב) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$

(ג) $y = \lg[\cos(\lg x)]$

(ד) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

8. עבור הפונקציה $y = f(x)$ מצא $\min_x f$, $\max_x f$, $\inf_x f$, $\sup_x f$ אם הם קיימים:

(א) $y = e^x, x \in R$

(ב) $y = -2x^2 + 8x - 3, x \in R$

(ג) $y = \text{arc cot } x, x \in R$

9. עבור הסדרה (x_n) מצא $\min_n (x_n)$, $\max_n (x_n)$, $\inf_n (x_n)$, $\sup_n (x_n)$

(א) $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)$

(ב) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos \frac{n\pi}{2}$

(ג) $x_n = -n \cdot [2 + (-1)^n]$

10. הוכח כי המספרים הבאים הם אי-רציונאליים:

(א) $\sqrt{5}$; (ב) $\sqrt{7} + 2$; (ג) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; (ד) $\sqrt[3]{2}$; (ה) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$.

11. הבא דוגמאות לשני מספרים האי-רציונאליים α ו- β כך שהמספרים הבאים הם רציונאליים:

(א) $\alpha + \beta$; (ב) $\alpha - \beta$; (ג) $\alpha \cdot \beta$; (ד) α / β ; (ה) $\alpha \cdot \beta - \alpha + \beta$.

12. הוכח את האי-שוויון $|x - y| \geq ||x| - |y||$

רמז: היעזר בהגדרה הבא: $|x| = \max\{x, -x\}$

תשובות:

1.2 (א) $n \cdot (12n^2 - 12n + 1)$; (ב) $n \cdot (16n^3 - 16n^2 - 2n + 1)$

2. (א) $\frac{n}{3 \cdot (4n + 3)}$; (ב) $\frac{n}{4 \cdot (6n + 4)}$

5.א) אין פתרון ; ב) $x = 7$.

6.א) $x \geq -\frac{2}{3}$ או $x \leq -\frac{10}{3}$; ב) $x > -1$ או $x < -2$.

7.א) $x \leq -1$; ב) $x > 1$; ג) $x > 4$; ד) $10^{(4k-1/2)\pi} < x < 10^{(4k+1/2)\pi}$; $x \in [-1/3; 1]$.

8.א) $\sup_x f$ לא קיים ; $\inf_x f = 0$; $\min_x f, \max_x f$ לא קיימים ;

ב) $\max_x f = \sup_x f = 5$; $\min_x f, \inf_x f$ לא קיימים ;

ג) $\inf_x f = 0, \sup_x f = \pi$; $\min_x f, \max_x f$ לא קיימים .

9.א) $\min_n (x_n) = \inf_n (x_n) = -3.5, \sup_n (x_n) = \max_n (x_n) = 5$;

ב) $\inf_n (x_n) = 0, \sup_n (x_n) = 2$; $\min_n (x_n), \max_n (x_n)$ לא קיימים ;

ג) $\max_n (x_n) = \sup_n (x_n) = -1$, סדרה לא חסומה מלמטה .

11.א) $\alpha = 5 + \sqrt{2}; \beta = 5 - \sqrt{2}$; ב) $\alpha = \sqrt{2} - 5; \beta = 7 + \sqrt{2}$; ג) $\alpha = 5 + \sqrt{2}; \beta = 5 - \sqrt{2}$;

ד) $\alpha = 5 + \sqrt{2}; \beta = 5 - \sqrt{2}$; ה) $\alpha = 7 \cdot \sqrt{3}; \beta = 8 \cdot \sqrt{3}$.

בהצלחה !