

I. עליה וירידה של פונקציה. אי-שוויונים.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות :

$$1) f(x) = 2 + x - x^2 \quad 2) f(x) = 3x - x^3 \quad 3) f(x) = 2x / (1 + x^2)$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} / (x + 100) \quad 5) f(x) = x + \sin x \quad 6) f(x) = x^2 - \ln x^2$$

הוכח את אי-השוויונים הבאים :

$$7) e^x > 1 + x, x \neq 0 \quad 8) x - x^2/2 < \ln(1+x) < x, x > 0$$

$$9) x - x^3/6 < \sin x < x, x > 0 \quad 10) \operatorname{tg} x > x + x^3/3, 0 < x < \pi/2$$

11. הוכח כי למשוואות הבאות יש פתרון ממשי אחד

$$a) 2x^3 = 5 - 2x \quad b) x^5 + 5x^3 + 10x = 30$$

שאלות מן המבחן

12. הוכח שעבור $x > 1$ מתקיים אי-השוויון $(x+1) \ln x > 2(x-1)$.

13. הוכח שלמשוואה $x^3 + x + a = 0$ יש בדיוק פתרון ממשי אחד עבור כל $a \in \mathbf{R}$.

14. מה יותר גדול: e^π או π^e ?

II. חקירת פונקציות ובנית גרפים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות :

$$1) f(x) = 2 + x - x^2 \quad 2) f(x) = (x-1)^3 \quad 3) f(x) = (x-1)^4 \quad 4) f(x) = |x|$$

$$5) f(x) = (x+1)^4 e^{-x} \quad 6) f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}, (n \in \mathbf{N})$$

מצא את המקסימום והמינימום מוחלט של הפונקציות הבאות בקטע נתון :

$$7) f(x) = 2^x, [-1, 5] \quad 10) f(x) = x^2 - 2 \ln x, [1/e, e]$$

$$8) f(x) = x^2 - 4x + 6, [-3, 10] \quad 11) f(x) = 2 \sin x - 1, [0, 2\pi]$$

$$9) 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8, [-3, 2]$$

בכל אחת מהמשוואות הבאות קבע את מספר השורשים הממשיים והפרד ביניהם :

$$12) x^5 = 5x - 5 \quad 13) x^5 = 5x + 1 \quad 14) x^3 = 3x^2 + 1 \quad 15) x^3 = 3x^2 - 1$$

16. הוכח כי למשוואה $4x = \sin \pi(x + 0.5) + 11$ קיים פתרון יחיד ומצא קטע הפתרון שאורכו $\frac{1}{4}$.

חקור את הפונקציות הבאות לפי השלבים הבאים : תחום ההגדרה, התנהגות של פונקציה ב"קצות" התחום, תחומי רציפות ונקודות אי-רציפות, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות או אי-זוגיות, מחזוריות, אסימפטוטות אנכיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות כלפי מעלה וכלפי מטה, נקודות פיתול בנה את הגרפים של הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{llll}
17) y = 3x - x^3 & 18) y = \frac{2-x^2}{1+x^4} & 19) y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} & 20) y = \frac{x^4}{(1+x)^3} \\
21) y = (x-3)\sqrt{x} & 22) y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} & 23) y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)} & \\
24) y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3} & 25) y = \sin x + \cos^2 x & 26) y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x & \\
27) y = x + e^{-x} & 28) y = x^{2/3} e^{-x} & 29) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & 30) y = x + \operatorname{arctg} x \\
31) y = (x+2)e^{1/x} & 32) y = \cosh x & 33) y = \sinh x & 34) y = \tanh x
\end{array}$$

III בעיות קיצון

1. מבין כל המלבנים שהיקפם P , מהן צלעות המלבן ששטחן מקסימלי?
2. סכום שני מספרים אי-שליליים שווה ל- M . מה צריכים להיות שני המספרים כדי שסכום ריבויים יהיה מינימלי?
3. מבין כל הגלילים בעלי נפח נתון V מצו את הגליל בעל שטח פנים מינימלי.
4. מצא את נפחו המקסימלי של גליל שניתן לחסום בתוך כדור שרדיוסו R .