

אינטגרל בלתי מסוימים

I. חשב את האינטגרלים הבאים תוך שימוש בטבלת האינטגרלים המידדים

- 1) $\int \left(7e^{-5x} - 6\sqrt{3x} - \pi x^8 + 9\sqrt[3]{x} - 2 \right) dx$
- 2) $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{7}{\sin^2 3x} + \frac{5}{\cos^2 4x} \right) dx$
- 3) $\int \left(2\cos \frac{x}{3} - \frac{\sin 6x}{4} \right) dx$
- 4) $\int (2x-3)^{10} dx$
- 5) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$
- 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$
- 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$
- 8) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$
- 9) $\int \sin 3x \sin 5x dx$
- 10) $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$
- 11) $\int \sin x \cos(x+a) dx$
- 12) $\int \cos^2 3x dx$
- 13) $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$
- 14) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$
- 15) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$
- 16) $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x} dx$
- 17) $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx$
- 18) $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$
- 19) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$
- 20) $\int (2^x+3^x)^2 dx$
- 21) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$
- 22) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$
- 23) $\int (5\sinh x - 3\cosh x) dx$
- 24) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
- 25) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
- 26) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$
- 27) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$
- 28) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx$
- 29) $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx$
- 30) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\pi/4)}$
- 31) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
- 32) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$
- 33) $\int x(1-x)^{10} dx$
- 34) $\int \frac{x^2 dx}{1+x}$
- 35) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
- 36) $\int x \sqrt{2-5x} dx$
- 37) $\int \ln x dx$
- 38) $\int x e^{-x} dx$
- 39) $\int x^2 \sin 3x dx$
- 40) $\int \arcsin 2x dx$
- 41) $\int x \arctan \frac{x}{3} dx$
- 42) $\int e^{3x} \sin 5x dx$
- 43) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$
- 44) $\int \sqrt{5-x^2} dx$
- 45) $\int \sqrt{x^2+8} dx$

חשב את האינטגרלים הבאים תוך החלפה של משתנה האינטגרציה :

- 46.a) $\int (2x-3)^{10} dx$
- b) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
- c) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$
- d) $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$
- e) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$
- 47.a) $\int \frac{xdx}{4+x^4}$
- b) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$
- 48.a) $\int xe^{-x^2} dx$
- b) $\int \left(\sin \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x^2}$
- c) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$
- d) $\int \frac{\ln^2 5x}{x} dx$
- e) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$
- f) $\int \frac{dx}{\cos x}$
- g) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$
- h) $\int \frac{dx}{\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}}$
- i) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
- j) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$49.a) \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad b) \int \frac{3x-1}{x^2+9} dx \quad c) \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} \quad d) \int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$$

$$e) \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \quad f) \int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$$

אינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות :

$$50 \quad a) \int \sin^5 2x \cos 2x dx \quad b) \int \tan 5x dx \quad c) \int \cot 3x dx \quad d) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} \quad e) \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$51.a) \int \sin 3x \sin 5x dx \quad b) \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx \quad c) \int \sin x \cos(x+a) dx \quad d) \int \cos^2 3x dx$$

$$e) \int \sin^3 5x dx \quad f) \int \cos^4 2x dx \quad g) \int \tan^3 7x dx$$

אינטגרציה של פונקציות רצינונליות :

$$52.a) \int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)} \quad b) \int \frac{x^3 dx}{x^2 + x - 2} \quad c) \int \frac{(x^3+1)dx}{x^3 - 5x^2 + 6x} \quad d) \int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)} \quad e) \int \frac{xdx}{x^3-1}$$

אינטגרציה של פונקציות אי-רצינונליות :

$$53. \int \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx \quad 54. \int \frac{2}{4+\sqrt{x-2}} dx \quad 55. \int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}} dx \quad 56. \int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$$

חשב את האינטגרלים הבאים באמצעות הצבות טריגונומטריות

$$57. \int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} \quad 58. \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \quad 59. \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

II תרגילי אינטגרציה שונים

$$1. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad 2. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad 3. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} \quad 4. \int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

$$5. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \quad 6. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad 7. \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$8. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} \quad 9. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx \quad 10. \int \sqrt{2+x+x^2} dx$$

$$11. \int x^3 e^{-x^2} dx \quad 12. \int \cos^6 x dx \quad 13. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx \quad 14. \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$15. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} \quad 16. \int x \sin^2 x dx \quad 17. \int \sqrt{2+x-x^2} dx \quad 18. \int \frac{\sin x \cos^3 x}{9+\cos^8 x} dx$$

$$19. \int \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x + 1} dx \quad 20. \int \frac{dx}{\cos x(3+\sin x)} \quad 21. \int \frac{dx}{x(x^3+1)} \quad 22. \int \frac{\ln x}{(2x+7)^3} dx$$

אינטגרל בלתי מסוים
תשובות
 I

- $$1) -\frac{7}{5}e^{-5x} - 4x\sqrt{3x} - \frac{\pi x^9}{9} + \frac{27}{4}\sqrt[3]{x^4} - 2x + C \quad 2) 5\ln|x| + \frac{7}{3}\cot 3x + \frac{5}{4}\tan 4x + C$$
- $$3) 6\sin\frac{x}{3} + \frac{\cos 6x}{24} + C \quad 4) \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C \quad 5) \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{x\sqrt{6}}{2} + C \quad 6) \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{6}}{2} + C$$
- $$7) \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}\right| + C \quad 8) \frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right| + C \quad 9) \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$$
- $$10) 3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + C \quad 11) C - \frac{1}{4}\cos(2x+a) - \frac{\sin a}{2}x \quad 12) \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{2}x + C$$
- $$13) x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + C \quad 14) \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \quad 15) \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$$
- $$16) 2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2} + C \quad 17) \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C \quad 18) C - x + 0.5\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$
- $$19) \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \quad 20) \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$$
- $$21) -\frac{2}{\ln 5}0.2^x + \frac{1}{5\ln 2}0.5^x + C \quad 22) 0.5e^{2x} - e^x + x + C \quad 23) 5\cosh x - 3\sinh x + C$$
- $$24) -x - \cot x + C \quad 25) -x + \tan x + C \quad 26) -0.25(1-3x)^{4/3} + C$$
- $$27) -0.4\sqrt{2-5x} + C \quad 28) -2.5(1-x)^{2/5} + C \quad 29) -0.2\cos 5x - x\sin 5x + C$$
- $$30) -0.5\cot(2x+\pi/4) + C \quad 31) \tan(x/2) + C \quad 32) -\cot(x/2) + C$$
- $$33) \frac{(1-x)^{12}}{12} - \frac{(1-x)^{11}}{11} + C \quad 34) 0.5x^2 - x + \ln|1+x| + C$$
- $$35) \frac{1}{3}\left((x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}\right) + C \quad 36) -\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{3/2} + C$$
- $$37) C - x(1-\ln x) \quad 38) C - (x+1)e^{-x} \quad 39) C - \frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x$$
- $$40) x \arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C \quad 41) C - \frac{3}{2}x + \frac{9+x^2}{2}\arctan\frac{x}{3}$$
- $$42) \frac{3\sin 5x - 5\cos 5x}{34}e^{3x} + C \quad 43) \frac{3\sin 3x - 2\cos 3x}{13}e^{-2x} + C$$
- $$44) \frac{x}{2}\sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C \quad 45) \frac{x}{2}\sqrt{x^2+8} + 4\ln\left|x + \sqrt{x^2+8}\right| + C$$
- $$46. a) \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C \quad b) C - \sqrt{1-x^2} \quad c) 0.25\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$$
- $$d) C - 0.25\ln|3-2x^2| \quad e) C - 0.5/(1+x^2)$$
- $$47. a) 0.25\arctan\frac{x^2}{2} + C \quad b) \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}}\right| + C$$
- $$48. a) C - \frac{1}{2}e^{-x^2} \quad b) \cos\frac{1}{x} + C \quad c) \frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3 + 27} + C \quad d) \frac{\ln^3 5x}{3} + C \quad e) \ln|\ln(\ln x)| + C$$

$$f) 0.5 \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C \quad \text{or} \quad \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

$$g) \frac{1}{2} \arctan^2 x + C \quad h) C - \frac{1}{\arcsin x} \quad i) C - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad j) C + \tan \frac{x}{2}$$

$$49. a) \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C \quad b) \frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

$$c) C - 8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} \quad d) 0.5 \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$$

$$e) 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4 \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+2x+2} \right| + C \quad f) \ln \frac{(x-4)^2}{|x-3|} + C$$

$$50. a) \frac{1}{12} \sin^6 2x + C \quad b) C - \frac{1}{5} \ln |\cos 5x| \quad c) C + \frac{1}{3} \ln |\sin 3x| \quad d) \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$$

$$e) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C \quad \text{or} \quad \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$51. a) \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C \quad b) 3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + C \quad c) C - \frac{1}{4} \cos(2x+a) - \frac{\sin a}{2} x$$

$$d) \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{2} x + C \quad e) C - \frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x$$

$$f) \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + \frac{3}{8} x + C \quad g) \frac{1}{14} \tan^2 7x + \frac{1}{7} \ln |\cos 7x| + C$$

$$52. a) \ln |(x-2)(x+5)| + C \quad b) C - x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{8}{3} \ln |x+2| + \frac{1}{3} \ln |x-1|$$

$$c) x + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{9}{2} \ln |x-2| + \frac{28}{3} \ln |x-3| + C \quad d) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C$$

$$e) \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$53) 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x}-1| + C \quad 54) 4\sqrt{x-2} - 16 \ln |\sqrt{x-2}+4| + C$$

$$55) 1.5 \ln |\sqrt[3]{x^2} + 1| + C$$

$$56) \frac{6}{5} t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 3 \ln |t^2 - t + 1| + 2\sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, t = \sqrt[6]{x}$$

$$57) \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + C \quad 58) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad 59) \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + C$$

תרגילי אינטגרציה שונות II

$$1) \arctan e^x + C \quad 2) -\frac{1}{\arcsin x} + C \quad 3) \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x \right) + C \quad 4) \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2} + C$$

$$5) \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx = C + \begin{cases} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} / (a^2 - b^2), & a^2 \neq b^2 \\ 0.5(\sin x)^2 / |a|, & a^2 = b^2 \end{cases}$$

- 6) $\tan x - \cot x + C$ 7) $\frac{\ln(1+\cos^2 x) - \cos^2 x}{2} + C$ 8) $(\arctg \sqrt{x})^2 + C$
 9) $6t - 6t^2 + 2t^3 - \frac{3}{2}t^4 + \frac{5}{6}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1+t^2) - 6\arctan t + C, t = \sqrt[6]{x+1}$
 10) $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right) + C$ 11) $C - \frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$
 12) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 x + C$ 13) $x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \arctan e^x + C$
 14) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ 15) $0.25\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C$
 16) $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x) + C$ 17) $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C$
 18) $-\frac{1}{12}\arctan\frac{\cos^4 x}{3} + C$ 19) $\ln|1+\sin x| + C$ 20) $\frac{1}{8}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(3+\sin x)}$
 21) $\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$ 22) $\frac{0.05}{2x+5} - \frac{0.25\ln x}{(2x+5)^2} + 0.01\ln\left|\frac{x}{2x+5}\right| + C$