

## אינטגרל בלתי מסוים

I. חשב את האינטגרלים הבאים תוך שימוש בטבלת האינטגרלים המיידיים

- 1)  $\int (7e^{-5x} - 6\sqrt{3x} - \pi x^8 + 9\sqrt[3]{x} - 2) dx$       2)  $\int \left( \frac{5}{x} - \frac{7}{\sin^2 3x} + \frac{5}{\cos^2 4x} \right) dx$
- 3)  $\int \left( 2 \cos \frac{x}{3} - \frac{\sin 6x}{4} \right) dx$       4)  $\int (2x-3)^{10} dx$       5)  $\int \frac{dx}{2+3x^2}$       6)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$
- 7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$       8)  $\int \frac{dx}{2-3x^2}$       9)  $\int \sin 3x \sin 5x dx$       10)  $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$
- 11)  $\int \sin x \cos(x+a) dx$       12)  $\int \cos^2 3x dx$       13)  $\int \left( \frac{1-x}{x} \right)^2 dx$       14)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$
- 15)  $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$       16)  $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x} dx$       17)  $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx$
- 18)  $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$       19)  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$       20)  $\int (2^x+3^x)^2 dx$
- 21)  $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$       22)  $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$       23)  $\int (5 \sinh x - 3 \cosh x) dx$       24)  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
- 25)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$       26)  $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$       27)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$       28)  $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx$
- 29)  $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx$       30)  $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\pi/4)}$       31)  $\int \frac{dx}{1+\cos x}$       32)  $\int \frac{dx}{1-\cos x}$
- 33)  $\int x(1-x)^{10} dx$       34)  $\int \frac{x^2 dx}{1+x}$       35)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$       36)  $\int x \sqrt{2-5x} dx$
- 37)  $\int \ln x dx$       38)  $\int x e^{-x} dx$       39)  $\int x^2 \sin 3x dx$       40)  $\int \arcsin 2x dx$       41)  $\int x \arctan \frac{x}{3} dx$
- 42)  $\int e^{3x} \sin 5x dx$       43)  $\int e^{-2x} \cos 3x dx$       44)  $\int \sqrt{5-x^2} dx$       45)  $\int \sqrt{x^2+8} dx$

חשב את האינטגרלים הבאים תוך החלפה של משתנה האינטגרציה :

46. a)  $\int (2x-3)^{10} dx$       b)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$       c)  $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$       d)  $\int \frac{x dx}{3-2x^2}$       e)  $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$
47. a)  $\int \frac{x dx}{4+x^4}$       b)  $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$
48. a)  $\int x e^{-x^2} dx$       b)  $\int \left( \sin \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x^2}$       c)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$       d)  $\int \frac{\ln^2 5x}{x} dx$       e)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$
- f)  $\int \frac{dx}{\cos x}$       g)  $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$       h)  $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$       i)  $\int \frac{dx}{1+\sin x}$       j)  $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$49. a) \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad b) \int \frac{3x-1}{x^2+9} dx \quad c) \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} \quad d) \int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$$

$$e) \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \quad f) \int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$$

אינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות :

$$50. a) \int \sin^5 2x \cos 2x dx \quad b) \int \tan 5x dx \quad c) \int \cot 3x dx \quad d) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} \quad e) \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$51. a) \int \sin 3x \sin 5x dx \quad b) \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx \quad c) \int \sin x \cos(x+a) dx \quad d) \int \cos^2 3x dx$$

$$e) \int \sin^3 5x dx \quad f) \int \cos^4 2x dx \quad g) \int \tan^3 7x dx$$

אינטגרציה של פונקציות ראציונליות :

$$52. a) \int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)} \quad b) \int \frac{x^3 dx}{x^2+x-2} \quad c) \int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x} \quad d) \int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)} \quad e) \int \frac{xdx}{x^3-1}$$

אינטגרציה של פונקציות אי-רציונליות :

$$53. \int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \quad 54. \int \frac{2}{4+\sqrt{x-2}} dx \quad 55. \int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}} dx \quad 56. \int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}} dx$$

חשב את האינטגרלים הבאים באמצעות הצבות טריגונומטריות

$$57. \int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} \quad 58. \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \quad 59. \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

## II תרגילי אינטגרציה שונים

$$1. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad 2. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad 3. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} \quad 4. \int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$$

$$5. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \quad 6. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad 7. \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$8. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} \quad 9. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx \quad 10. \int \sqrt{2+x+x^2} dx$$

$$11. \int x^3 e^{-x^2} dx \quad 12. \int \cos^6 x dx \quad 13. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx \quad 14. \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$15. \int \frac{dx}{3x^2-2x-1} \quad 16. \int x \sin^2 x dx \quad 17. \int \sqrt{2+x-x^2} dx \quad 18. \int \frac{\sin x \cos^3 x}{9+\cos^8 x} dx$$

$$19. \int \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x + 1} dx \quad 20. \int \frac{dx}{\cos x(3+\sin x)} \quad 21. \int \frac{dx}{x(x^3+1)} \quad 22. \int \frac{\ln x}{(2x+7)^3} dx$$



$$f) 0.5 \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \quad \text{or} \quad \ln \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

$$g) \frac{1}{2} \arctan^2 x + C \quad h) C - \frac{1}{\arcsin x} \quad i) C - \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad j) C + \tan \frac{x}{2}$$

$$49. a) \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C \quad b) \frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

$$c) C - 8\sqrt{5+2x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} \quad d) 0.5 \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$$

$$e) 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4 \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+2x+2} \right| + C \quad f) \ln \frac{(x-4)^2}{|x-3|} + C$$

$$50. a) \frac{1}{12} \sin^6 2x + C \quad b) C - \frac{1}{5} \ln |\cos 5x| \quad c) C + \frac{1}{3} \ln |\sin 3x| \quad d) \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$$

$$e) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C \quad \text{or} \quad \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$51. a) \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C \quad b) 3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + C \quad c) C - \frac{1}{4} \cos(2x+a) - \frac{\sin a}{2} x$$

$$d) \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{2} x + C \quad e) C - \frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x$$

$$f) \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + \frac{3}{8} x + C \quad g) \frac{1}{14} \tan^2 7x + \frac{1}{7} \ln |\cos 7x| + C$$

$$52. a) \ln |(x-2)(x+5)| + C \quad b) C - x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{8}{3} \ln |x+2| + \frac{1}{3} \ln |x-1|$$

$$c) x + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{9}{2} \ln |x-2| + \frac{28}{3} \ln |x-3| + C \quad d) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C$$

$$e) \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$53) 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x}-1| + C \quad 54) 4\sqrt{x-2} - 16 \ln |\sqrt{x-2}+4| + C$$

$$55) 1.5 \ln |\sqrt[3]{x^2}+1| + C$$

$$56) \frac{6}{5} t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 3 \ln |t^2-t+1| + 2\sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, t = \sqrt[6]{x}$$

$$57. \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + C \quad 58. \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad 59. \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + C$$

## תרגילי אינטגרציה שונים II

$$1) \arctan e^x + C \quad 2) -\frac{1}{\arcsin x} + C \quad 3) \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \sin x \right) + C \quad 4) \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2} + C$$

$$5) \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx = C + \begin{cases} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} / (a^2 - b^2), & a^2 \neq b^2 \\ 0.5(\sin x)^2 / |a|, & a^2 = b^2 \end{cases}$$

- 6)  $\tan x - \cot x + C$       7)  $\frac{\ln(1 + \cos^2 x) - \cos^2 x}{2} + C$       8)  $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 + C$
- 9)  $6t - 6t^2 + 2t^3 - \frac{3}{2}t^4 + \frac{5}{6}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1+t^2) - 6\operatorname{arctan} t + C, t = \sqrt[6]{x+1}$
- 10)  $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right) + C$       11)  $C - \frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$
- 12)  $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 x + C$       13)  $x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\operatorname{arctan} e^x + C$
- 14)  $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$       15)  $0.25\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C$
- 16)  $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x) + C$       17)  $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\operatorname{arcsin}\frac{2x-1}{3} + C$
- 18)  $-\frac{1}{12}\operatorname{arctan}\frac{\cos^4 x}{3} + C$       19)  $\ln|1 + \sin x| + C$       20)  $\frac{1}{8}\ln\frac{(1 + \sin x)^2}{(1 - \sin x)(3 + \sin x)}$
- 21)  $\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C$       22)  $\frac{0.05}{2x+5} - \frac{0.25\ln x}{(2x+5)^2} + 0.01\ln\left|\frac{x}{2x+5}\right| + C$