תרגיל 13

1. א. מי מהאינטגרלים $J=\int_0^1 e^{x^3}$ $I=\int_0^1 e^{x^2}$ גדול יותר?

ב. מי מהאינטגרלים $J=\int_{-1}^0 e^{x^3}$ $I=\int_{-1}^0 e^{x^2}$ גדול יותר?

ג. מי מהאינטגרלים $J=\int_1^2 e^{x^3}$ $I=\int_1^2 e^{x^2}$ גדול יותר?

2. היעזרו במונוטוניות האינטגרל כדי להוכיח את אי השוויונים הבאים
(אין צורך לחשב את אינטגרלים מסובכים):

א. $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^1\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$;

ב. $\frac{3}{e}\le\int_0^3 e^{x^2-2x}dx\le 3e^3$ (חקרו את $f(x)=x^2-2x$ בקטע $[0,3]$)

3. שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x)=(x-1)^2$ בקטע $[0,3]$, חשבו את הערך הממוצע שלה בקטע הנתון ומצאו את הנקודה c (אם קיימת) בה $f(c)=f_{ave}$.

4. שרטטו את התחומים החסומים ע"י הקווים הבאים וחשבו את שטחם:

א. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\pi/4$.

ב. $y=x^3-4x^2+x$, $y=0$ (לשטח יש שני חלקים).

5. שרטטו וחשבו את שטח התחום המוגבל בין הפונקציות $y=2\sqrt{5-x}$, $y=\sqrt{x}$ וציר ה- x.

6. השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה $y=x^2-2x$ והישר $y=-2x+c$ $(c>0)$ שווה 36.
הביעו את השטח באמצעות c ומצאו את ערכו של c.

7. התחומים החסומים ע"י הקווים הנתונים מסתובבים מסביב ציר ה-x. שרטטו אותם וחשבו את הנפחים של גופי הסיבוב.

א. $y=2x$, $y=1$, $x=0$. ב. $y=x+3$, $y=x^2+1$.

8. נמקו מדוע הפונקציות הבאות גזירות ומצאו את הנגזרת (לפי המשתנה x):

א. $\int_0^{x^3+1} e^{t^2}dt$ ב. $\int_{x^2-3}^{\sin x} e^{t^3}dt$

9. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל. נמקו מדוע ניתן להשתמש בו:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan t\,dt}{x\sin x}$ ב. $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt}{(x-1)^2}$ ג. $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{2x^2-x}\ln t\,dt}{\int_1^x (4t-1)\ln t\,dt}$.

תרגיל 13
פתרון

1. א. מי מהאינטגרלים $J=\int_0^1 e^{x^3}dx$, $I=\int_0^1 e^{x^2}dx$ גדול יותר?

$0\le x\le 1, x^2\ge x^3 \Rightarrow e^{x^2}\ge e^{x^3} \Rightarrow I\ge J$

ב. מי מהאינטגרלים $J=\int_{-1}^0 e^{x^3}dx$, $I=\int_{-1}^0 e^{x^2}dx$ גדול יותר?

$-1\le x\le 0, \quad x^2\ge 0, x^3\le 0 \quad \Rightarrow x^2\ge x^3 \Rightarrow e^{x^2}\ge e^{x^3} \Rightarrow I\ge J$

ג. מי מהאינטגרלים $J=\int_1^2 e^{x^3}dx$, $I=\int_1^2 e^{x^2}dx$ גדול יותר?

$1\le x\le 2, x^3\ge x^2 \Rightarrow e^{x^3}\ge e^{x^2} \Rightarrow I\le J$

2. היעזרו במונוטוניות האינטגרל כדי להוכיח את אי השוויונות הבאים (אין צורך לחשב את אינטגרלים מסובכים):

א. $\frac{2}{9}\le \int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le \frac{2}{7}$;

$-1\le x\le 1 \Leftrightarrow$

$-1\le x^3\le 1 \Leftrightarrow 8-1\le 8+x^3\le 8+1 \Leftrightarrow$

$7\le 8+x^3\le 9 \Rightarrow \frac{1}{9}\le \frac{1}{8+x^3}\le \frac{1}{7}$

לכן $\frac{2}{9}\le \int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le \frac{2}{7}$

ב. $\frac{3}{e}\le \int_0^3 e^{x^2-2x}dx\le 3e^3$ (חקרו את $f(x)=x^2-2x$ בקטע $[0,3]$)

$f'(x)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$.

הפונקציה $f(x)=x^2-2x$ יורדת בקטע $(0,1)$, $f(0)=0, f(1)=-1$,
ועולה בקטע $(1,3)$, $f(3)=3$.

e^{x^2-2x} גם יורדת בקטע $(0,1)$, $e^{x^2-2x}\big|_{x=1}=\frac{1}{e}(\min)$

ועולה בקטע $(1,3)$, $e^{x^2-2x}\big|_{x=3}=e^3(\max)$

$\frac{1}{e}\le e^{x^2-2x}\le e^3$, $0\le x\le 3$, לכן $\frac{3}{e}\le \int_0^3 e^{x^2-2x}dx\le 3e^3$

3. שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x)=(x-1)^2$ בקטע $[0,3]$,
חשבו את הערך הממוצע שלה בקטע הנתון ומצאו את הנקודה c
(אם קיימת) בה $f(c)=f_{ave}$.

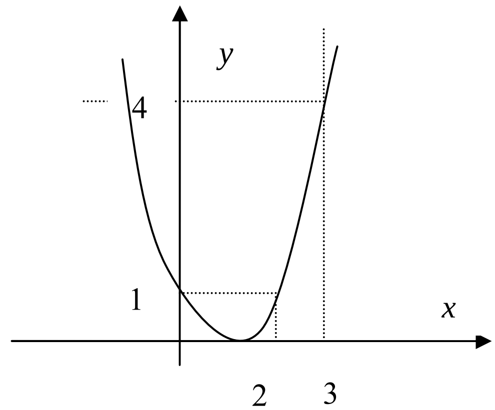
$f(0)=(0-1)^2=1, \qquad f(3)=(3-1)^2=4$

$$f(c)=f_{ave}=\frac{1}{(3-0)}\int_0^3 (x-1)^2\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=3}=1$$

$$1=(c-1)^2 \Leftrightarrow f_{ave}=f(c)$$

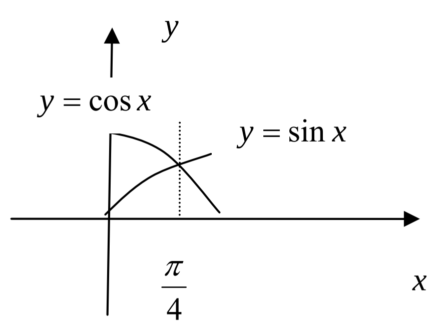
$$c_1=0, c_2=2 \quad \Leftarrow \quad c-1=\pm 1$$

הערך הממוצע מתקבל בשתי נקודות: $f(0)=f(2)=f_{ave}$.



4. שרטטו את התחומים החסומים ע"י הקווים הבאים וחשבו את שטחו.

א. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\pi/4$.

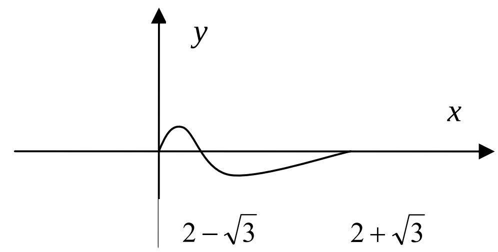


$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}-\sin 0-\cos 0=\sqrt{2}-1$$

ב. $y=x^3-4x^2+x$, $y=0$ (לשטח יש שני חלקים)

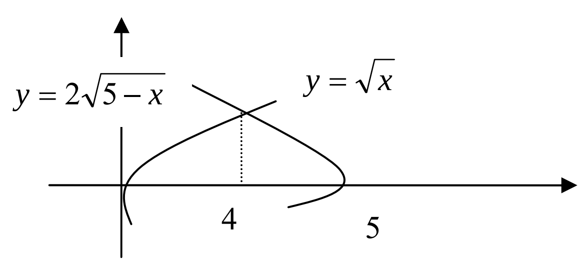
$$y=x(x^2-4x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$$

$$y(3)=3^3-4\cdot 3^2+3=-6$$



$$\int_0^{2-\sqrt{3}}\left(x^3-4x^2+x\right)dx+\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\left|x^3-4x^2+x\right|dx=$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2-\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=2-\sqrt{3}}^{x=2+\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^4-\frac{8}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)^4+\frac{4}{3}\left(2+\sqrt{3}\right)^3-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

5. שרטטו וחשבו את שטח התחום המוגבל בין הפונקציות $y=2\sqrt{5-x}$, $y=\sqrt{x}$ וציר ה- x.



$$\sqrt{x}=2\sqrt{5-x}\Rightarrow \qquad 0\le x\le 5, \qquad x=4\left(5-x\right)\Leftrightarrow 5x=20\Leftrightarrow x=4$$
$$\int_0^4\sqrt{x}dx+\int_4^5 2\sqrt{5-x}dx=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_{x=0}^{x=4}-2\cdot\frac{2\sqrt{\left(5-x\right)^3}}{3}\Big|_{x=4}^{x=5}=$$
$$=\frac{2\sqrt{4^3}}{3}+2\cdot\frac{2\sqrt{\left(5-4\right)^3}}{3}=\frac{20}{3}$$

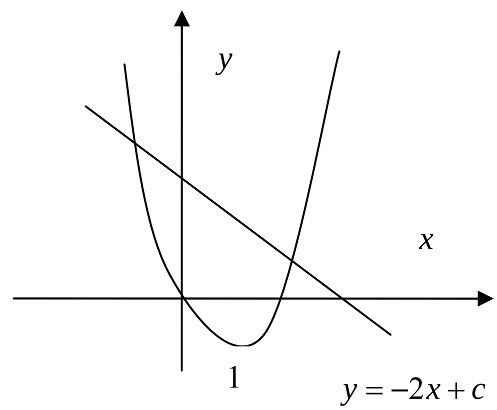
6. השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה $y=x^2-2x$ והישר $y=-2x+c$ $(c>0)$ שווה 36.

הביעו את השטח באמצעות c ומצאו את ערכו של c.

נחשב נקודות חיתוך של הגרפים $y=x^2-2x$ ו- $y=-2x+c$.

$$x^2-2x=-2x+c\Rightarrow x^2=c\Rightarrow x=\pm\sqrt{c}$$

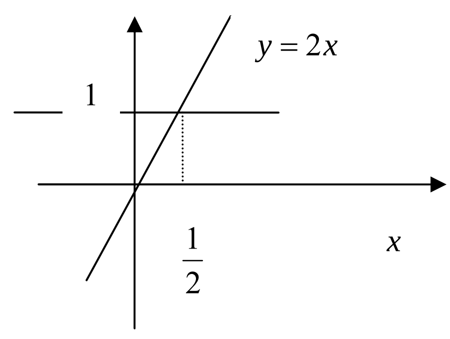
$$\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}}\left(-2x+c-x^2+2x\right)dx==\left(cx-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=-\sqrt{c}}^{x=\sqrt{c}}=$$
$$=2c\sqrt{c}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{c}\right)^3=\frac{4}{3}c\sqrt{c}=36\Rightarrow c=9$$



7. התחומים החסומים ע"י הקווים הנתונים מסתובבים מסביב ציר ה-x.
שרטטו אותם וחשבו את הנפחים של גופי הסיבוב.

א. $y=2x$, $y=1$, $x=0$.

נקודת החיתוך $2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$



כאשר הקטע $0\le x\le\frac{1}{2}$ $y=1,$ מסתובב סביב ציר ה- x מתקבל הגליל .

נפח של הגליל $V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}1^2\,dx$

כאשר הקטע $0\le x\le\frac{1}{2}$ $y=2x,$ מסתובב סביב ציר ה- x מתקבל החרוט הישר .

נפח של החרוט $V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(2x)^2dx$

נפח של גוף הסיבוב הנדרש הוא

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1^2-(2x)^2\right)dx=\pi\left(x-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\pi$$

ב. $y=x^2+1$, $y=x+3$.

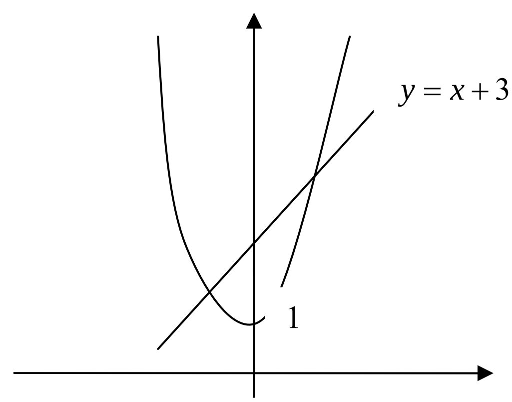
נקודות החיתוך :

$$x^2+1=x+3\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1,x=2$$

כאשר $y=x+3$ $-1\le x\le 2,$ מסתובב סביב ציר ה- x

מתקבל הנפח $V_1=\pi\int_{-1}^{2}(x+3)^2dx$, כאשר $y=x^2+1$ $-1\le x\le 2,$

מסתובב סביב ציר ה- x מתקבל הנפח $V_2=\pi\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)^2dx$.



נפח של גוף הסיבוב הנדרש הוא

$$V=V_1-V_2=\pi\int_{-1}^{2}\left((x+3)^2-\left(x^2+1\right)^2\right)dx=\pi\int_{-1}^{2}\left(-x^4-x^2+6x+8\right)dx=$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x\right)\Big|_{x=-1}^{x=2}=\pi\left(-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+12+16-\left(-\frac{-1}{5}-\frac{-1}{3}+3-8\right)\right)=23\frac{2}{5}$$

8.. נמקו מדוע הפונקציות הבאות גזירות ומצאו את הנגזרת (לפי המשתנה x):

א. $\int_0^{x^3+1}e^{t^2}dt$

המשפט היסודי של חדו"א :

תהי פונקציה $g(t)$ רציפה בקטע (a,b) ותהי c הנקודה כלשהי בקטע $a<c<b$.

אז $F(x)=\int_a^x g(t)dt$ היא פונקציה קדומה של $g(x)$ בקטע (a,b) ,
כלומר $F'(x)=g(x)$, כאשר $a<x<b$.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3+1} e^{t^2}\,dt\right)=e^{\left(x^3+1\right)^2}\cdot 3x^2$$

ב. $\int_{x^2-3}^{\sin x} e^{t^3}\,dt$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2-3}^{\sin x} e^{t^3}\,dt\right)=e^{(\sin x)^3}\cdot\cos x-e^{\left(x^2-3\right)^3}\cdot 2x$$

9. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל. נמקו מדוע ניתן להשתמש בו:

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan t\,dt}{x\sin x}=\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x+x\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{2}$$

ב.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2(x-1)x^2}==\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{2}$$