פתרון לעבודת בית מספר 1

1.1 **א.** **בסיס האינדוקציה**: עבור $n=1$ השוויון מתקיים: $1=\frac{1\cdot 2}{2}$

נניח נכונות עבור n **ונוכיח עבור** $n+1$:

$$1+2+\ldots+n+(n+1)= \text{[לפי הנחה]} =\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ב. **בסיס האינדוקציה**: עבור $n=1$ השוויון מתקיים: $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$

נניח נכונות עבור n **ונוכיח עבור** $n+1$:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \text{[לפי הנחה]} =$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ג. **בסיס האינדוקציה**: עבור $n=1$ השוויון מתקיים: $1^3=\frac{1\cdot 4}{4}$

נניח נכונות עבור n **ונוכיח עבור** $n+1$:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \text{[לפי הנחה]} =$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

1.2 **א.**

$$5^2+13^2+21^2+\ldots+(8n-3)^2=\underbrace{(8\cdot1-3)^2+(8\cdot2-3)^2+(8\cdot3-3)^2+\ldots+(8\cdot n-3)^2}_{\text{פעמים } N}=$$

$$=8^2\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-2\cdot8\cdot3(1+2+3+\ldots+n)+(3^2+3^2+\ldots+3^2)=$$

$$\text{[לפי 1.1 א' ו-ב']} =\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}-2\cdot8\cdot3\frac{n\cdot(n+1)}{2}+9n=$$

$$\frac{n[32(n+1)(2n+1)-72(n+1)+27]}{3}=\frac{n(64n^2+24n-13)}{3}$$

ב.

$$7^3+10^3+13^3+...+(3n+4)^3=(3\cdot1+4)^3+(3\cdot2+4)^3+(3\cdot3+4)^3+...+(3\cdot n+4)^3=$$

$$=3^3\cdot(1^3+2^3+3^3+...+n^3)+3\cdot3^2\cdot4(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+3\cdot3\cdot4^2(1+2+3+...+n)+$$

$$+(4^3+..times-n..+4^3)=[\text{לפי 1.1 א׳, ב׳, ו-ג׳}]$$

$$=\frac{27n^2(n+1)^2}{4}+18(n+1)(2n+1)+72n(n+1)+64n=$$

$$=\frac{n[27n(n+1)^2+72(n+1)(2n+1)+288(n+1)+256]}{4}=\frac{n(27n^3+198n^2+531n+616)}{4}$$

.2 <u>**בסיס האינדוקציה**</u>**: עבור** $n=1$ **נקבל:**

$$A+B=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}A^{1-k}B^k=\frac{1!}{0!1!}A+\frac{1!}{1!0!}B=A+B$$

נניח נכונות עבור n**, נוכיח כי עבור** $n+1$ **מתקיים:**

$$(A+B)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k=\frac{1!}{0!1!}A+\frac{1!}{1!0!}B=A+B$$

נרשום:

$$(A+B)^{n+1}=(A+B)(A+B)^n=[\text{לפי הנחה}]=(A+B)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}A^{n+1-k}B^k=$$

$$=A^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]A^{n+1-k}B^k+B^{n+1}$$

נשתמש בזהויות:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

ונקבל:

$$(A+B)^{n+1}=\binom{n+1}{0}A^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^{k}+\binom{n+1}{n+1}B^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^{k}$$

הנוסחה הנ"ל נכונה עבור כל $A,B\in\mathbb{R}$ **, בפרט אם נציב** $A=B=1$

נקבל את א': $2^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

ואם נציב $A=1,B=-1$ **נקבל את ב':** $0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}$

3.1 **נשתמש בכך ש -** $\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{(4n+3)}\right)$

נקבל:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{15}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{(4n-1)}}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=\frac{n}{3(4n+3)}$$

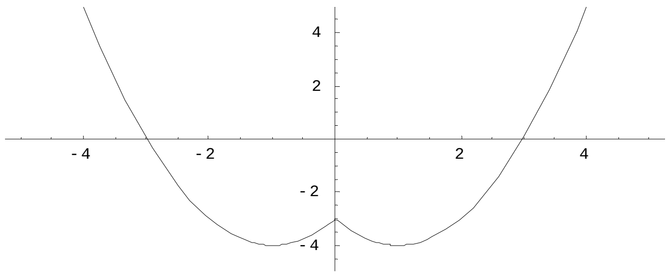
3.2 **באותו אופן** $\frac{1}{(6n-2)(6n+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(6n-2)}-\frac{1}{(6n+4)}\right)$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{22}\right)+\ldots+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(6n-2)}-\frac{1}{(6n+4)}\right)=$$

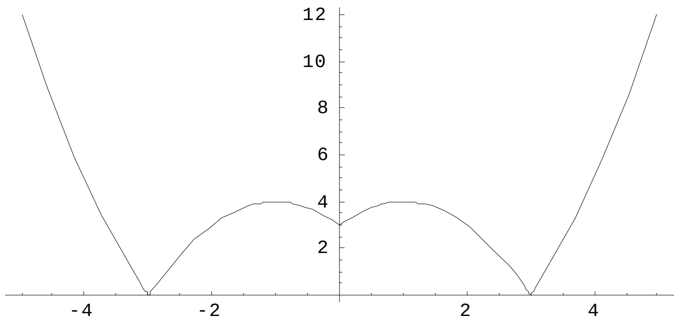
$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{10}}+\cancel{\frac{1}{10}}-\cancel{\frac{1}{16}}+\cancel{\frac{1}{16}}-\cancel{\frac{1}{22}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{(6n-2)}}-\frac{1}{(6n+4)}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(6n+4)}\right)=\frac{n}{4(6n+4)}$$

4.1 **נבנה קודם גרף של** $\tilde{y}=x^{2}-2|x|-3$

$$\tilde{y}=\begin{cases}x^{2}-2x-3, x\ge 0\\ x^{2}+2x-3, x<0\end{cases}$$



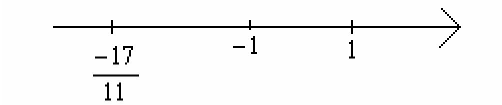
בהינתן גרף של פונקציה $y=f(x)$ הגרף של $y=\left|f(x)\right|\begin{cases} f(x), f(x)\ge 0 \\ -f(x), f(x)<0 \end{cases}$ מתקבל ממנו ע"י שיקוף כלפי ציר ה- x של כל החלקים הנמצאים מתחת לציר ה - x. לכן הגרף של $y=\left|x^2-2|x|-3\right|$ יראה כך:



4.2 **נפתור:**

$$\left|x^2-1\right|+\left|11x+17\right|=42 \Rightarrow \left|(x+1)(x-1)\right|+\left|11x+17\right|=42$$

נחלק את כל הציר ל-4 תחומים:



עבור $x<\frac{-17}{11}$ **נקבל:**

$$x^2-1-11x-17=42 \Rightarrow x^2-11x-60=0$$

$x_1=15$ **- לא בתחום** $x_2=-4$

עבור $\frac{-17}{11}\le x<-1$ **נקבל:**

$$x^2-1+11x+17=42 \Rightarrow x^2+11x+26=0$$

$x_1=13$ $x_2=-2$ **שניהם לא בתחום**

עבור $-1 \le x < 1$ נקבל:

$$-x^2+1+11x+17=42 \Rightarrow x^2-11x+24=0$$

$x_1=3$ $\quad$ $x_2=8$ שניהם לא בתחום

עבור $x \ge 1$ נקבל:

$$x^2-1+11x+17=42 \Rightarrow x^2+11x+26=0$$

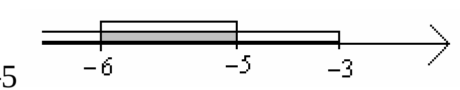
הפעם $x=13$ פתרון שייך לתחום

תשובה סופית: $x=13$, $x=-4$

4.3

עבור $x < -3$ נקבל:

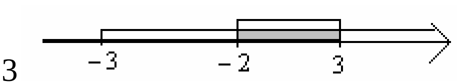
$$-3x-9>\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+6 \Rightarrow x^2+11x+30<0$$



$-6<x<-5$

עבור $x \ge -3$ נקבל:

$$3x+9>\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+6 \Rightarrow x^2-x-6<0$$



$-2<x<3$

תשובה סופית: $-2<x<3$, $-6<x<-5$

5.1

$$y=\sqrt{\frac{x^3-2x^2-15x+36}{x+1}}$$

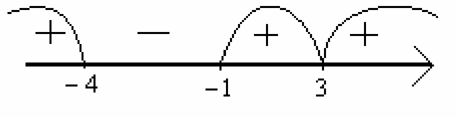
צריך לפתור אי שוויון : $\dfrac{x^3-2x^2-15x+36}{x+1} \ge 0$

קל לראות כי $x=3$ **מאפס את הפולינום במונה, לכן הוא חייב להתחלק ב -** $(x-3)$

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{x^2+x-12} & \\
\hline
x^3-2x^2-15x+36 & x-3 \\
x^3-3x^2 & \\
\hline
x^2-15x+36 & \\
x^2-3x & \\
\hline
-12x+36 & \\
-12x+36 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

כלומר: $x^3-2x^2-15x+36=\left(x-3\right)\left(x^2+x-12\right)=\left(x-3\right)^2\left(x+4\right)$

$$\frac{x^3-2x^2-15x+36}{x+1}\ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(x-3\right)^2\left(x+4\right)}{x+1}\ge 0$$



תשובה: $x>-1$, $x<-4$

5.2 $y=\sqrt{\ln(\sin x)}$

$$\ln(\sin x)\ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin x\ge 1$$

רק כאשר $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$

6.1 $X_n=(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$

ברור כי $X_{2k-1}<0$, $X_{2k}>0$ **לכל** $k\in\mathbb{N}$ **ולכן** $X_{2k-1}<X_{2k}$ **בנוסף,**

$$X_{2k}-X_{2k+2}=\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5}>0 \qquad \Rightarrow \qquad X_{2k}>X_{2k+2}$$

לכן $\max(X_n)=\sup(X_n)=X_2=\dfrac{1}{5}$

$$X_{2k-1}-X_{2k+1}=\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k-1}<0 \quad \Rightarrow \quad X_{2k-1}<X_{2k+1}$$

ולכן $\min(X_n)=\inf(X_n)=X_1=-\dfrac{1}{3}$

6.2 $X_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$

גם כאן $X_{2k-1}<0$ **,** $X_{2k}>0$ **ולכן** $X_{2k-1}<X_{2k}$ **לכל** k.

$$X_{2k}-X_{2k+2}=\frac{4k^2}{4k^2+1}-\frac{4(k+1)^2}{4(k+1)^2+1}=\frac{-8k-4}{(4k^2+1)[4(k+1)^2+1]}<0 \Rightarrow X_{2k}<X_{2k+2}$$

ולכן לא קיים $\max(X_n)$. **נראה כי** $\sup(X_n)=1$ **כי** $X_{2k}=\dfrac{4k^2}{4k^2+1}<1$ **לכל** k,

בנוסף, לכל $\varepsilon>0$ **האיבר** $X_{2\tilde{k}}=\dfrac{4\tilde{k}^2}{4\tilde{k}^2+1}$ **יקיים:**

$X_{2\tilde{k}}+\varepsilon=\dfrac{4\tilde{k}^2}{4\tilde{k}^2+1}+\varepsilon>1$ **כאשר :** $\tilde{k}^2>\dfrac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}$ **או**

$$\left(\tilde{k}\in\mathbb{N}\right):\tilde{k}>\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

באותו אופן:

$$X_{2k-1}-X_{2k+1}=\frac{\left(2k+1\right)^2}{\left(2k+1\right)^2+1}-\frac{\left(2k-1\right)^2}{\left(2k-1\right)^2+1}=\frac{8k}{\left(\left(2k+1\right)^2+1\right)\left(\left(2k-1\right)^2+1\right)}>0$$

כלומר $X_{2k-1}>X_{2k+1}$ **ולכן לא קיים** $\min(X_n)$. **נראה כי** $\inf(X_n)=-1$. **ואכן**

$X_{2k-1}=-\dfrac{\left(2k-1\right)^2}{\left(2k-1\right)^2+1}>-1$ **לכל** k. **בנוסף, לכל** $\varepsilon>0$ **האיבר**

$$\tilde{X}_{2k-1}=-\frac{\left(2\tilde{k}-1\right)^2}{\left(2\tilde{k}-1\right)^2+1}$$

יקיים $\tilde{X}_{2k-1}-\varepsilon=-\dfrac{\left(2\tilde{k}-1\right)^2}{\left(2\tilde{k}-1\right)^2+1}-\varepsilon<-1$ **כאשר** $\dfrac{\left(2\tilde{k}-1\right)^2}{\left(2\tilde{k}-1\right)^2+1}+\varepsilon>1$ **וזה כאשר**

$$(2\tilde{k}-1)^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$ **או** $$(\tilde{k}\in\mathbb{N}) : \tilde{k} > \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}+1\right]$$

6.3 $$X_n = n\cdot\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

נרשום: $$X_n = \frac{n}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$$

אם $(k\in\mathbb{N})\, n=3k$ **אז** $\cos\left(\frac{2\pi 3k}{3}\right) = \cos(2\pi k) = 1$

ולכן $X_{3k}=0$

עבור $(k\in\mathbb{N})\, n=3k-1$:

$$\cos\left(\frac{2\pi(3k-1)}{3}\right) = \cos\left(2\pi k-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

ולכן $$X_{3k-1} = \frac{(3k-1)}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9k-3}{4} \to +\infty$$

עבור $(\tilde{k}\in\mathbb{N})\, n=3k-2$

$$\cos\left(\frac{2\pi(3k-2)}{3}\right) = \cos\left(2\pi k-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

ולכן גם $$X_{3k-2} = \frac{(3k-2)}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9k-6}{4} \to +\infty$$

ברור מכך ש- $\min(X_n)=\inf(X_n)=0$ **,** **ה-** $\max(X_n)$ **אינו קיים ומכיוון שהיא לא חסומה אז** $\sup(X_n)=+\infty$

7.1 **לכל** $\varepsilon>0$ **מחפשים** $n_0\in\mathbb{N}$ **כך שלכל** $n>n_0$ **,** $n\in\mathbb{N}$ **יתקיים:**

$$\left|\frac{3n^2-5n+4}{2n^2+n-5}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n^2-5n+4}{2n^2+n-5}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{-13n+23}{2(2n^2+n-5)}\right| = \frac{13n-23}{2(2n^2+n-5)} <$$ [עבור $n>2$]

[$2n^2-5>n^2$ כאשר $5<n^2$ וזה נכון עבור $n>2$]

$$< \frac{13n}{2(2n^2-5)} < \frac{13n}{2\cdot n^2} = \frac{13}{2n} < \varepsilon$$

7.2 לכל מספר ממשי חיובי A מחפשים $n_0 \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ יתקיים:

$$\frac{4n^2-n+2}{3n+4} > A$$

אבל $$\frac{4n^2-n+2}{3n+4} > \frac{3n^2+3n-6}{3n+6} = \frac{3(n+2)(n-1)}{3n+6} = n-1 > A$$

[$4n^2-n+2 > 3n^2+3n-6$ כאשר $n^2-4n+8>0$ וזה נכון לכל n - $(n-2)^2+4>0$]

8.1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3n-5)^2-4(n+2)^2}{5(n+1)(2n-3)} =$$ [נחלק ב n^2]

$$0$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(3n-5)^2}{n^2}-\frac{4(n+2)^2}{n^2}}{5\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n-3)}{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3-\frac{5}{n}\right)^2-4\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{5\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)} = \frac{3^2-4\cdot 1}{5\cdot 1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$0$$

8.2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{3n-2+\sqrt{9n^2+3n-6}}{\sqrt[3]{8n^3+5n-1}+4-3n} =$$ [נחלק ב- n] **0**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{\sqrt{9n^2+3n-6}}{\sqrt{n^2}}}{\frac{\sqrt[3]{8n^3+5n-1}}{\sqrt[3]{n^3}}+\frac{4}{n}-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^3}}+\frac{4}{n}-3}=\frac{3+3}{2-3}=-6$$

0

8.3

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{25n^2-4n+3}-(5n-4)\right]=\infty-\infty$$

נשתמש בנוסחא $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{25n^2-4n+3-(5n-4)^2}{\sqrt{25n^2-4n+3}+(5n-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{36n-13}{\sqrt{25n^2-4n+3}+(5n-4)}=$$ **נחלק ב** n

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{36-\frac{13}{n}}{\frac{\sqrt{25n^2-4n+3}}{\sqrt{n^2}}+5-\frac{4}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{36-\frac{13}{n}}{\sqrt{25-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+5-\frac{4}{n}}=\frac{36}{5+5}=\frac{18}{5}$$