

## עבודת בית 1

1.1 הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית את הנוסחאות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.2 חשב באמצעות הנוסחאות הנ"ל את בסכומים הבאים:

$$5^2 + 13^2 + 21^2 + \dots + (8n-3)^2$$

$$7^3 + 10^3 + 13^3 + \dots + (3n+4)^3$$

2 הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית את נוסחת הבינום של ניוטון

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

$$; \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (\text{א})$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{כאשר} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (\text{ב})$$

3 חשב את הסכומים הבאים:

$$; \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)} \quad 3.1$$

$$\cdot \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) \quad \text{רמז:}$$

$$\cdot \frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 22} + \dots + \frac{1}{(6n-2) \cdot (6n+4)} \quad 3.2$$

4.1 בנה את הגרף של הפונקציה  $y = |x^2 - 2|x| - 3|$

4.2 פתור את המשוואה  $|x^2 - 1| + |11x + 17| = 42$

4.3 פתור את האי-שוויון  $|3x + 9| > \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 6$

5 מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$; y = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2 - 15x + 36}{x+1}} \quad 5.1$$

$$\cdot y = \sqrt{\ln \sin x} \quad 5.2$$

6 עבור הסדרה  $(x_n)$  מצא  $\min_n(x_n)$ ,  $\max_n(x_n)$ ,  $\inf_n(x_n)$ ,  $\sup_n(x_n)$

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad 6.1$$

$$x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} \quad 6.2$$

$$x_n = n \sin^2 \frac{\pi n}{3} \quad 6.3$$

7 הוכח על סמך ההגדרה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 4}{2n^2 + n - 5} = \frac{3}{2} \quad 7.1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n + 2}{3n + 4} = \infty \quad 7.2$$

8 חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-5)^2 - 4(n+2)^2}{5(n+1)(2n-3)} \quad 8.1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2 + \sqrt{9n^2 + 3n-6}}{\sqrt[3]{8n^3 + 5n-1} + 4-3n} \quad 8.2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{25n^2 - 4n + 3} - (5n - 4)] \quad 8.3$$

### תרגילים נוספים:

9.1 הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית או בדרך אחרת כלשהי את הנוסחה הבאה

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

רמז: היעזר בשוויון  $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ .

9.2 תהיו  $(a_n)$  סדרה חשבונית בעלת ההפרש  $d$  ו-  $(b_n)$  סדרה הנדסית בעלת מנה  $q \neq 1$ . הוכח בשיטת האינדוקציה המתמטית או בדרך אחרת כלשהי את הנוסחה

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \frac{(a_1 - d) \cdot b_1 + d \cdot S_n^* - a_n \cdot b_{n+1}}{1 - q}$$

כאשר  $S_n^*$  הוא סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה הנדסית, וקבל מכאן את הנוסחאות הבאות:

$$2 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 8 \cdot 125 + \dots + (3n-1) \cdot 5^n = \frac{5}{16} [7 + (12n-7) \cdot 5^n] \quad (\text{א})$$

$$\frac{7}{6} + \frac{9}{36} + \frac{11}{216} + \dots + \frac{5n+2}{6^n} = \frac{1}{25} \left( 37 - \frac{10n+37}{6^n} \right) \quad (\text{ב})$$

10.1 הוכח כי המספרים הבאים הם אי-רציונליים:

(א)  $\sin 10^\circ$ ; (ב)  $\log_2 3$ .

10.2 הוכח כי המספרים  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  לא יכולים להיות איברים של סדרה חשבונית.

11 נתונים שלושה מספרים שונים  $a \neq b \neq c$ .  
א) בדוק על סמך הצבת כי למשוואה ריבועית

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1$$

שלושה שורשים ממשיים שונים  $x_3 = c, x_2 = b, x_1 = a$   
ב) הסבר את קיום של שלושה שורשים לשוויון בסעיף א.

12 הוכח את האי-שוויון  $|x-y| \geq ||x|-|y||$   
רמז: היעזר בהגדרה הבא:  $|x| = \max\{x, -x\}$

12.1 מצא את המחזור של הפונקציות המחזוריות הבאות:  
א)  $y = \sin 3x$ ; ב)  $y = \tan 4x$ ; ג)  $y = [x]$  (חלק שלם של  $x$ ); ד)  $y = \{x\} = x - [x]$  (חלק שברי של  $x$ ).

12.2 הוכח כי הפונקציות הבאות אינן מחזוריות:  
א)  $y = \cos(\sqrt[3]{x})$ ; ב)  $y = \sin(x^3)$ .

13 הוכח לפי ההגדרה:

13.1 אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L < 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty$ ;

13.2 אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$ ;

בהצלחה!