

## דף עבודה מס' 2

1. חשבו את הגבולות הבאים :

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) \quad (\text{א})$$

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3}{[1+4+7+\dots+(3n-2)]^2} \right] \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2} \quad (\text{ג})$$

2. הוכיחו על סמך הגדרה את הטענות הבאות :

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2 + 1}{4n^3 + n + 2} = \frac{5}{4} \quad (\text{א})$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 8}{2n + 1} = \infty \quad (\text{ב})$$

3. חשבו את הגבולות הבאים :

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) \quad (\text{א})$$

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right) \quad (\text{ב})$$

4. הוכיחו שהסדרה  $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$  מתכנסת (קריטריון קושי).

5. חשבו את הגבולות הבאים (משפט הסנדוויץ'): :

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3 + n}} \right) \quad (\text{א})$$

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 1^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 2^3 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + n^3 + n}} \right) \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n}{n!} \right) \quad (\text{ג})$$

6. חשבו את הגבולות הבאים :

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 8n + 7}{n^2 - 7n + 3} \right)^{2n-4} \quad (\text{א})$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^3 - 4n^2 + 2n + 6}{3n^3 + n^2 + 3n - 8} \right)^{\frac{-2n^2}{3n-2}} \quad (\text{ב})$$

7. הוכיחו בשיטת אינדוקציה מתמטית או בשיטה אחרת :

(א) הסדרה  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - \frac{16}{25}}$ ;  $a_1 = 1$  היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה ע"י המספר 1.6. מהו גבול של הסדרה?

(ב) הסדרה  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - \frac{16}{25}}$ ;  $a_1 = 2$  היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ע"י המספר 1.6. מהו גבול של הסדרה?

8. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) אם הסדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז גם הסדרה  $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת;

(ב) אם הסדרה  $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז גם הסדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת;

(ג) אם הסדרה  $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז הסדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה;

(ד) אם הסדרה  $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז שתי הסדרות  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ו-  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסות;

(ה) אם הסדרה  $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז לפחות אחת משתי הסדרות  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  או  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת;

(ו) אם הסדרה  $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתבדרת, אז לפחות אחת משתי הסדרות  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  או  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתבדרת;

(ז) אם הסדרה  $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז גם הסדרה  $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת.

(ח) אם הסדרה  $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז לפחות אחת משתי הסדרות  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  או  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת;

(ט) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

9. הסדרה  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  מונוטונית עולה ומתכנסת למספר  $e$  ואילו הסדרה  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

מונוטונית יורדת ומתכנסת למספר  $e$ , הוכיחו את האי-שוויון  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ .

10. הוכיחו כי אם הסדרות  $(x_n)$  ו-  $(y_n)$  חסומות אז מתקיים:

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\text{א})$$

$$. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\text{ב})$$

### תשובות :

1. א) 1; ב) 3; ג) 1; ד) א) 1; ב) 0; 5. א)  $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ ; ב) 1; ג) 0;

6. א)  $e^{-2}$ ; ב)  $e^{\frac{10}{9}}$ ; 7. א) 1.6; ב) 1.6.