פתרון לתרגיל Ex 2add (רקורסיות) — הוכח התכנסות ומצא את הגבול

① $a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6}$, $a_1 = 4$

א) נוכיח ש- $a_n \geq 3$ לכל n (באינדוקציה)

1) $a_1 = 4 \geq 3$

2) נניח ש- $a_n \geq 3$ ונוכיח ש- $a_{n+1} \geq 3$:

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6} \geq \sqrt{5\cdot 3 - 6} = \sqrt{9} \geq 3$$

לכן הטענה נכונה מאינדוקציה: $a_n \geq 3$ לכל n

ב) נוכיח שהסדרה יורדת

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6} \overset{?}{\leq} a_n \ (>0)$$

$$5a_n - 6 \overset{?}{\leq} a_n^2$$

$$0 \overset{?}{\leq} a_n^2 - 5a_n + 6$$

$+ \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$

לפי סעיף א) $a_n \geq 3$ לכן $a_n^2 - 5a_n + 6 \geq 0$

$\Leftarrow$ $a_{n+1} \leq a_n$ לכל n $\Leftarrow$ a_n יורדת

$\Downarrow$

a_n יורדת וחסומה מלמטה לכן a_n מתכנסת

לגבול סופי, נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

נעבור לגבול בנוסחה

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6}$$

$$A = \sqrt{5A - 6}$$

$$A^2 = 5A - 6 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0$$

$$\Rightarrow A = 2 \text{ או } A = 3$$

לפי סעיף א) $a_n \geq 3$ לכל n $\Leftarrow$ $A \geq 3$

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

(2) $a_1=-1$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

א) נוכיח ש- $a_n \le 2$ לכל n (באינדוקציה)

1) $a_1=-1\le 2$

2) נניח ש- $a_n \le 2$ $\Leftarrow$ $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\le\sqrt{4}=2$

לכן הסדרה חסומה מלמעלה! $a_n\le 2$

ב) נוכיח שהסדרה עולה

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \overset{?}{\ge} a_n$$

$$2+a_n \overset{?}{\ge} a_n^2$$

$$0 \overset{?}{\ge} a_n^2-a_n-2$$

$$+ \quad -1 \quad - \quad 2 \quad +$$

הוכחנו ש- $0< a_n\le 2$, לכן

$0\ge a_n^2-a_n-2$ $\Leftarrow$ $a_{n+1}\ge a_n$

והסדרה עולה

$\Downarrow$

a_n חסומה מלמעלה ועולה לכן a_n מתכנסת לגבול סופי, נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

נעבור לגבול במשוואה

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

$$A=\sqrt{2+A} \Rightarrow A^2=2+A \Rightarrow A^2-A-2=0$$

$\Rightarrow A=2$ או $A=-1$

$a_n>0$ $\Leftarrow$ $A\ge 0$ $\Leftarrow$

$$\lim a_n = 2$$

(3) $a_1=4,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+30}$

א) נוכיח ש- $a_n \le 6$ לכל n (לפי אינדוקציה)

1) $a_1=4\le 6$

2) נניח ש- $a_n\le 6$ ונוכיח ש- $a_{n+1}\le 6$

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+30}\le\sqrt{6+30}=\sqrt{36}\le 6$$

לכן a_n חסומה מלמעלה

ב) נוכיח ש- a_n עולה

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+30}\overset{?}{\ge} a_n$$

$$a_n+30\overset{?}{\ge} a_n^2$$

$$0\overset{?}{\ge} a_n^2-a_n-30$$

$+\quad -5\quad -\quad 6\quad +$

הוכחנו ש- $0\le a_n\le 6$ לכן

$$0\ge a_n^2-a_n-30$$

לכן $a_{n+1}\ge a_n$ ו- a_n עולה

$\Downarrow$

a_n חסומה מלמעלה ועולה לכן a_n מתכנסת

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ נסמן, סופי

נעבור לגבול בנוסחה

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+30}$$

$$A=\sqrt{A+30}\Rightarrow A^2=A+30$$

$$A^2-A-30=0\Rightarrow A=-5 \text{ או } A=6$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=6 \Leftarrow A\ge 0\Leftarrow a_n\ge 0$$

(4) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 6$

א) נוכיח ש- $a_n \le 9$ לכל n (אינדוקציה)

1) $a_1 = 1 \le 9$

2) נניח ש- $a_n \le 9$ ונוכיח ש- $a_{n+1} \le 9$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 6 \le \sqrt{9} + 6 = 3+6 = 9$$

לכן a_n חסומה מלמעלה

ב) נוכיח ש- a_n עולה

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 6 \overset{?}{\ge} a_n$$

$$\cancel{\sqrt{a_n}} \quad 0 \overset{?}{\ge} a_n - \sqrt{a_n} - 6$$

$$0 \overset{?}{\ge} (\underbrace{\sqrt{a_n}+2}_{>0})(\sqrt{a_n}-3)$$

$$0 \overset{?}{\ge} \sqrt{a_n} - 3$$

הוכחנו ש- $0 \le a_n \le 9$ $\Leftarrow$ $\sqrt{a_n} \le 3$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\sqrt{a_n} - 3 \le 0$

לכן $a_{n+1} \ge a_n$ ו- a_n עולה

$\Downarrow$

a_n מונוטונית חסומה מלמעלה ועולה, לכן מתכנסת לגבול סופי, נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

נעבור לגבול במשוואה $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 6$

$\Leftarrow$ $A = \sqrt{A} + 6$ $\Leftarrow$ $A - \sqrt{A} - 6 = 0$

$\Leftarrow$ $\underset{\text{לא קיים}}{\sqrt{A} = -2}$ או $\sqrt{A} = 3$ $\Leftarrow$ $A = 9$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 9$$

5) $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{3}$

א) נוכיח ש- $a_n \le 5$ לכל n (אינדוקציה)

1) $a_1=2\le 5$

2) נניח ש- $a_n\le 5$, נוכיח ש- $a_{n+1}\le 5$

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{3} \le \frac{2\cdot 5+5}{3}=5$$

לכן a_n חסומה מלעיל

ב) נוכיח ש- a_n עולה

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{3} \overset{?}{\geq} a_n$$

$$2a_n+5 \overset{?}{\geq} 3a_n$$

$$5 \overset{?}{\geq} a_n$$

$\Leftarrow a_{n+1}\ge a_n \Leftarrow$ a_n עולה

$\Downarrow$

a_n חסומה מלעיל ועולה $\Leftarrow$ מתכנסת

לפי משפט, נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

נציב במשוואה $a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{3}$

$$A=\frac{2A+5}{3} \Rightarrow A=5$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 5$$

(6) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{6}{5-a_n}$

א) נוכיח ש- $a_n \le 2$ לכל n (אינדוקציה)

1) $a_1 \le 2$

2) נניח ש- $a_n \le 2$, נוכיח ש- $a_{n+1} \le 2$

$$a_n \le 2$$
$$-a_n \ge -2$$
$$5-a_n \ge 3$$
$$a_{n+1} = \frac{6}{5-a_n} \le \frac{6}{3} = 2$$

$\Leftarrow$ a_n חסומה מלמעלה

ב) נוכיח ש- a_n עולה

$$a_{n+1} = \frac{6}{5-a_n} \overset{?}{\ge} a_n$$

חיובי !

$$6 \overset{?}{\ge} 5a_n - a_n^2$$

$$a_n^2 - 5a_n + 6 \overset{?}{\ge} 0$$

$+ \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$

$a_n^2 - 5a_n + 6 \ge 0$ — לכל $a_n \le 2$

לכן $a_{n+1} \ge a_n$ $\Leftarrow$ a_n עולה

a_n עולה וחסומה מלמעלה $\Leftarrow$ a_n מתכנסת

לגבול סופי, נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

נציב בנוסחת הנסיגה $a_{n+1} = \frac{6}{5-a_n}$

$$A = \frac{6}{5-A} \Rightarrow 5A - A^2 = 6 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0$$

$\Leftarrow$ $A=3$ או $A=2$. הוכחנו ש- $a_n \le 2$ $\Leftarrow$ $A \le 2$

$\Leftarrow$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

(7) $\sqrt{6},\ \sqrt{6+\sqrt{6}},\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}},\ \dots$

$a_1=\sqrt{6},\quad a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$

א) נוכיח ש- $a_n \le 3$ לכל n (אינדוקציה)

1) $a_1 \le 3$

2) נניח ש- $a_n \le 3$, נוכיח ש- $a_{n+1} \le 3$

$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n} \le \sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

$\Leftarrow$ a_n חסומה מלעלה

ב) נוכיח ש- a_n עולה

$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n} \overset{?}{\ge} a_n$

$6+a_n \overset{?}{\ge} a_n^2$

$0 \overset{?}{\ge} a_n^2-a_n-6$

$+ \quad -2 \quad - \quad 3 \quad +$

הוכחנו ש- $0 \le a_n \le 3$, לכן $a_n^2-a_n-6 \le 0$

לכן $a_{n+1} \ge a_n$ ו- a_n עולה

$\Downarrow$

a_n חסומה מלעלה ועולה $\Leftarrow$ מתכנסת לגבול סופי, נסמן

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$

נעבור לגבול בנוסחה $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$

$A=\sqrt{6+A} \Rightarrow A^2=6+A \Rightarrow A^2-A-6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A=3$ או $A=-2$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \Leftarrow A=3 \Leftarrow A\ge 0 \Leftarrow a_n \ge 0$