גבול של סדרה

I.

1 א. הוכח שאם $a,b\in\mathbb{R}$ & $(a>0,b>0)$ אזי $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

ב. הוכח שאם $a,b\in\mathbb{R}$ & $(a>0,b>0)$ & $ab=1$ אזי $a+b\ge 2$

2 יהי $x_n=\frac{n}{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$. הוכח כי $\lim_{n\to\infty}x_n=1$ תוך שימוש בהגדרת הגבול (לכל ε >0 חשב $n_0(\varepsilon)\in N$ כך שלכל $n>n_0$ יתקיים $|x_n-1|<\varepsilon$). מלא את הטבלה :

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	. . .
n_0					

3 הוכח כי הסדרות הבאות הן סדרות אפסות, תוך שימוש בהגדרת הגבול (לכל ε >0 חשב $n_0(\varepsilon)\in N$
כך שלכל $n>n_0$ יתקיים $|x_n|<\varepsilon$). לכל אחת מהן מלא טבלה כנ"ל

$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (a $x_n=\frac{2n}{n^3+1}$ (b $x_n=\frac{(-1)^n}{n!}$ (c $x_n=(-1)^n(0.999)^n$ (d

4 הוכח כי עבור $x_n=\frac{\sqrt{n}-1}{2}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$ תוך שימוש בהגדרת הגבול
(לכל $B\in\mathbb{R}$ חשב $n_0(B)\in N$ כך שלכל $n>n_0$ יתקיים $x_n>B$). מלא את הטבלה :

B	10	100	1000	10000	. . .
n_0					

5 הוכח כי עבור $x_n=n-n^3$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$ תוך שימוש בהגדרת הגבול
(לכל $A\in\mathbb{R}$ חשב $n_0(A)\in N$ כך שלכל $n>n_0$ יתקיים $x_n<A$). מלא את הטבלה :

A	-10	-100	-1000	-10000	. . .
n_0					

6 הוכח כי כל אחת מהסדרות הבאות אינה חסומה, אך גם אינה שואפת לא אל $+\infty$ ולא אל $-\infty$

$x_n=(-1)^n n$ (a $x_n=n^{(-1)^n}$ (b

7 הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\ne 1$

II. חשב את הגבולות הבאים:

דוגמאות

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+3}{n^3+9}$ (1

פתרון: $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+3}{n^3+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^3}-\frac{2n}{n^3}+\frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{9}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{9}{n^3}}=\frac{0}{1}=0$$

$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\right)$ (2

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\right)=[\infty[\infty-\infty]]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1-1/n^2}}=\frac{2}{2}=1$$

$3)\lim_{n\to\infty}\frac{10000\,n}{n^2+1}$ $\quad 4)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-5n+8}{n^2+4}$ $\quad 5)\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-3n+8}{n^3+6n-9}$

$6)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)^2}{5n^4+1}$ $\quad 7)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ $\quad 8)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

$9)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+7}{2n^2+3n}\right)^3$ $\quad 10)\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(6-\frac{3}{5n}\right)^2\right]$ $\quad 11)\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$

$12)\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$ $\quad 13)\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$

<u>תשובות</u>

3) 0, 4) ∞, 5) 5, 6) 1/5, 7) 0, 8) 1, 9) 1/8, 10) 36, 11) ∞, 12) 1, 13) $(a+b)/2$

<u>III. חשב את הגבולות הבאים:</u>

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

אם $a_n>0$ וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0, & q<1\\ \infty, & q>1\end{cases}$

פתרון:

$$a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2},\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}a_n>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=4,\quad 4>1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\infty$$

2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^3}$

תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים, $a_n>0$. אם וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אזי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

פתרון: $a_n=5n^3,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)^3}{5n^3}=1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^3}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}}$

<u>דרך 1</u>

$$a_n=2+\sqrt[3]{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt[3]{n+1}}{2+\sqrt[3]{n}}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

דרך 2 (משפט סנדוויץ')

$$\sqrt[n]{2+2} < \sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}} < \sqrt[n]{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}} \quad (\forall n>8) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{4} < \sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}} < \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/3} = 1\cdot 1^{1/3} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}} = 1$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}$. פתרון:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\arctan 5n}{n^2+7}$

פתרון:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \arctan 5n < \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+7} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left((\arctan 5n)\,\frac{1}{n^2+7}\right) = 0$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5}$ 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n+7}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+9^n}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4+\sqrt[5]{n}}$ 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n+5}$ 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} \quad (a>1)$ 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} \quad (|a|<1,\ |b|<1)$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ 19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ 21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$ 23) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^3+1}$ 25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(n^2+8)}{\sqrt{n+5}}$

תשובות

5) 1, 6) 1, 7) 1, 8) 9, 9) 1, 10) 0, 11) 0, 12) 0, 13) ∞, 14) 0, 15) 0,

16) $\frac{1}{3}$, 17) $\frac{1-b}{1-a}$, 18) $\frac{1}{2}$, 19) $\frac{1}{2}$, 20) 1, 21) 2 22) 1, 23) 5, 24) 1, 25) 0

IV. חשב את הגבולות הבאים:

$$1)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{1+10n}\right)^n \quad 2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3(5+n)}\right)^{2n-4} \quad 3)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2+5n}\right)^n \quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2-3}{2+n^2}\right)^n$$

$$5)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{2-4n+n^2}\right)^n \quad 6)\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} \quad 7)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad 8)\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{n^n} \quad 9)\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$$

תשובות 1) $e^{-0.4}$, 2) $e^{-26/3}$, 3) 0, 4) ∞, 5) e^2, 6) 0 7) e^{-1} 8) ∞, 9) 0

V.

1. מצא את האיבר הגדול ביותר בסדרות הבאות:

$$a)\ x_n=\frac{n^2}{2^n} \qquad b)\ x_n=\frac{\sqrt{n}}{100+n} \qquad c)\ x_n=\frac{1000^n}{n!}$$

תשובות $a)\ x_3=\frac{9}{8}$ $b)\ x_{100}=0.05$ $c)\ x_{1000}=x_{999}=\frac{1000^{999}}{999!}$

2. תהי הסדרה (x_n) מתכנסת והסדרה (y_n) מתבדרת. מה אפשר לטעון לגבי התכנסות הסדרות:
(x_n+y_n) (a $(x_n\cdot y_n)$ (b ? הבא דוגמאות מתאימות.

3. תהינה הסדרות (x_n), (y_n) מתבדרות. האם נכון לטעון כי הסדרות
(x_n+y_n) (a $(x_n\cdot y_n)$ (b מתבדרות גם הן ? הבא דוגמאות מתאימות.

4. יהי $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ ותהי (y_n) סדרה כלשהי. האם נכון לטעון כי $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$?
הבא דוגמאות מתאימות.

5. יהי $\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$. האם נובע מכאן כי לפחות אחת הסדרות (x_n) או (y_n)
שואפת לאפס? התבונן בדוגמה: $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$; $y_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$.

בהצלחה !