

פונקציות

I . קבע את תחומי ההגדרה הטבעיים של הפונקציות הבאות.
ציון אילו מבין התחומים הם סימטריים.

$$\begin{aligned}
 &1) y = \frac{x^2}{1+x} \quad 2) y = \sqrt{1-|x|} \quad 3) y = \log(x+3) \quad 4) y = \log_{x-1} a \quad 5) y = \sin \sqrt{x^2+1} \\
 &6) y = 2^{\sqrt{x}} \quad 7) y = \sqrt{2+x-x^2} \quad 8) y = \log_a(x^2-4) \quad 9) y = 1 + \tan 2x \quad 10) y = 1 - \cot 3x \\
 &11) f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x} \quad 12) f(x) = \sqrt{3x-x^3} \quad 13) f(x) = \log(x+2) + \log(x-2) \\
 &14) f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad 15) f(x) = \frac{\ln(x^2-9)}{\ln x} \quad 16) f(x) = \sqrt{\sin x} \quad 17) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}
 \end{aligned}$$

תשובות:

התחומים לא סימטריים:

$$\begin{aligned}
 &1) (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \quad 3) (-3, \infty) \quad 4) (1, 2) \cup (2, \infty) \quad 6) [0, \infty) \quad 7) [-1, 2] \quad 11) (-\infty, 0) \cup (0, 3] \\
 &12) (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}] \quad 13) (2, \infty) \quad 14) [-1, 1) \quad 15) (3, \infty) \quad 16) 2\pi k \leq x \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &17) \{x | x > 0, x \neq n, n \in \mathbb{N}\} = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \dots
 \end{aligned}$$

התחומים סימטריים:

$$\begin{aligned}
 &2) [-1, 1] \quad 5) (-\infty, \infty) \quad 8) (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), a > 0 \quad 9) x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \quad 10) x \neq \pm n\frac{\pi}{3} \\
 &\quad\quad\quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

II . חקור את הזוגיות של הפונקציות הבאות (אילו מבין הפונקציות הבאות הן פונקציות זוגיות, אי-זוגיות או כלליות):

$$\begin{aligned}
 &1) y = 2x^2 + 3 \quad 2) y = x^4 - x^2 + 2 \quad 3) y = \frac{x+1}{x^3} \quad 4) y = 1 - |x| \quad 5) y = |x+1| - |x-1| \\
 &6) y = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \quad 7) y = x^3 + x^2 - 1 \quad 8) y = x^2 + |x-1| \quad 9) y = x^3 - |x| \\
 &10) y = \sin x + \tan x \quad 11) y = 2^x + 2^{-x} \quad 12) y = \log_{0.3}(x^2) \quad 13) f(x) = 3x - x^3 \\
 &14) f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} \quad 15) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, \quad 16) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})
 \end{aligned}$$

תשובות:

1,2,4,11,12,14	זוגית
5,6,10,13,15,16	אי זוגית
3,7,8,9	כללית

III. האם הפונקציה מחזורית? אם כן, חשב עבורה את המחזור הקטן ביותר

- 1) $f(x) = 6 \sin x$ 2) $f(x) = \cos 3x$ 3) $f(x) = 3 \sin 4x$ 4) $f(x) = \tan \frac{x}{3}$
 5) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \lambda \neq 0$ 6) $f(x) = \tan \frac{3}{4} x$ 7) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$
 8) $f(x) = \cos^2 x$ 9) $f(x) = \sin(x^2)$ 10) $f(x) = \sin 2\pi x$ 11) $f(x) = 2 \tan \frac{x}{2} - 3 \tan \frac{x}{3}$
 12) $f(x) = \sin 3x \cos 3x$ 13) $f(x) = \sin^2 x$ 14) $f(x) = |\cos x|$ 15) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	<u>תשובות:</u>
T	2π	$\frac{2\pi}{3}$	0.5π	3π	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	π	-	1	6π	$\frac{\pi}{3}$	π	π	0.5π	

I

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{IV. הפונקציה } \text{sgn } x \text{ מוגדרת כדלהלן:}$$

בנה את גרף הפונקציה. הראה כי $|x| = x \cdot \text{sgn } x$.

V. האם הפונקציה f זוגית או-זוגית?

האם הפונקציה f מחזורית? אם כן, חשב עבורה את המחזור הקטן ביותר.
 צייר את הגרפים של הפונקציות הבאות:

1) $\begin{cases} f(x) = x - 1 \\ x \in (-2, 2) \end{cases}, f(x+4) = f(x) \Rightarrow f(-19.3) = ? \quad f(13.5) = ? \quad f(1) = ?$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 3, & 1 \leq x < 2 \end{cases}, f(x+2) = f(x) \Rightarrow f(-1.4) = ?, f(2.5) = ?, f(13.7) = ?$

3) $f(x) = x, 0 < x < 2, f(-x) = f(x), f(x+4) = f(x)$

4) $f(x) = x, 0 < x < 2, f(-x) = -f(x), f(x+4) = f(x)$

5) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, f(-x) = f(x), f(x+2\pi) = f(x)$

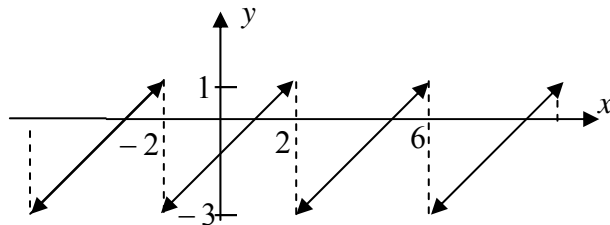
6) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, f(-x) = -f(x), f(x+2\pi) = f(x)$

$$f(-19.3) = ? \quad f(13.5) = ? \quad f(1) = ? \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x - 1, & x \in (-2, 2) \\ f(x + 4) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$1) 1 \in (-2, 2) \Rightarrow f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$13.5 \notin (-2, 2), \quad \begin{cases} f(13.5) = f(3 \cdot 4 + 1.5) \\ f(x + 4) = f(x) \end{cases} \Rightarrow f(13.5) = f(1.5) = 1.5 - 1 = 0.5$$

$$\begin{cases} f(-19.3) = f(-5 \cdot 4 + 0.7) \\ f(x + 4) = f(x) \end{cases} \Rightarrow f(0.7) = 0.7 - 1 = -0.3$$



הפונקציה $f(x)$ אינה הפונקציה זוגית וגם אינה אי-זוגית.
הפונקציה $f(x)$ מחזורית $T = 4$.

VI. טרנספורמציה של הגרפים

גרף של פונקציה $y = f(x)$ ידוע. צייר גרפים של פונקציות פונקציות:
 $y = f(x - a)$, $y = f(x) + A$, $y = f(kx)$, $y = Kf(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$

הזזת הגרף ב a יחידות ימינה	$y = f(x - a), a > 0$	
הזזת הגרף ב A יחידות למלה	$y = f(x) + A, A > 0$	
שיקוף הגרף ביחס לציר ה y	$y = f(-x)$	
של הגרף בכיוון של ציר x	כיווץ	$k > 1$
	מתחה	$0 < k < 1$
שיקוף הגרף ביחס לציר ה x	$y = -f(x)$	
של הגרף בכיוון של ציר y	מתחה	$K > 1$
	כיווץ	$0 < K < 1$
(1) ל $x > 0$ העתקה של הגרף (2) ל $x < 0$ שיקוף של החלקי הימין של הגרף לעומת ציר y	$y = f(x)$	
(1) העתקה של חלקי הגרף הנמצאים מעל ציר ה x (2) שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר x לעומת ציר x	$y = f(x) $	

1. תהי $y = f(x) = x^2$. צייר גרפים של פונקציות:

$$y = f(x + 2), \quad y = f(x - 1), \quad y = f(2x), \quad y = 2f(x), \quad y = |f(x) - 3|$$

2. צייר גרפים של פונקציות:

$$y = \sin x, \quad y = 2 + \sin x, \quad y = \sin(x + 1), \quad y = 2 + \sin(x + 1), \quad y = \sin |x|, \quad y = |\sin x|$$

3. צייר גרפים של פונקציות: $y = \frac{2}{x+3} + 1$, $y = |3^x - 2|$, $y = 3^{|x|}$, $y = -\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $y = \log(|x|)$.

VII. קבע את תחומי ההגדרה הטבעיים של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \arccos \sqrt{x+2}$ 2) $f(x) = \arctan 2x$ 3) $f(x) = \arcsin \frac{4}{x}$ 4) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

1) $[-2, -1]$ 2) $(-\infty, \infty)$ 3) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ 4) $[-1/3, 1]$ **תשובות**

VIII. מצא את הפונקציה ההפוכה f^{-1} ואת תחום הגדרתה כאשר:

1. $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbf{R}$, 2. $f(x) = x^2, x \leq 0$, 3. $f(x) = x^2, x \geq 0$,
4. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1$, 5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 0$, 6. $f(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

תשובות

1) $y = \frac{x-3}{2}, x \in \mathbf{R}$, 2) $y = -\sqrt{x}, x \geq 0$, 3) $y = \sqrt{x}, x \geq 0$, 4) $y = \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1$
5) $y = -\sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$, 6) $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$