גבולות של פונקציות

I הגדרת הגבול של פונקציה לפי היינה (Heine)

1. הוכח כי : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$

רשום הגדרות לטענות הבאות והבא דוגמאות מתאימות:

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ 3. $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=b$ 4. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=b$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ 6. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ 7. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

II חשב את הגבולות הבאים :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$ 4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ 6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ 7. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ 9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ 10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ 11. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

12. $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 13. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$ 16. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

III חשב את הגבולות הבאים :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cot 3x$ 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(10\pi x)}{\tan 5x}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 5x}{2x}$ 13. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\tan 2x)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

14. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arctan x}{2x+\arcsin x}$ 16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$ 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+9}-3}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x-\sin 3x}{x+\cos 2x}$ 19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$ 20. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ 21. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

22. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$ 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}$ 24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

IV חשב את הגבולות הבאים :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{x^3/(1-x)}$ 6) $\lim\limits_{x\to (\pi/4)+}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$ 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{(x-1)/(x+1)}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$ 10) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

12) $\lim_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$ 13) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n$ 14) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 15) $\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

16) $\lim_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$ 17) $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a},(a>0)$ 18) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

19) $\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$ 20) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$ 21) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

22) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ 23) $\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2},(x>0)$

24) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},(a>0)$ 25) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$ 26) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

27) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$ 28) $\lim_{x\to 0+}(x\cdot\ln x)$ 29) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

30) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ 31) $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}}$ 32) $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}}$

33) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$ 34) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$

35) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ 36) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ 37) $\lim_{x\to 0}x\cdot\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$ 38) $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)$

תשובות

I 3) $\lim\limits_{x\to 1-}(2+\sqrt{1-x})=2$ 5, 6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}2^{1/x}=1$ 7) $\lim\limits_{x\to 2}-1/(x-2)^2=-\infty$

II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	$\frac{2}{3}$	10	0.5	6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	-2	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{2}$

III

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	0	$-7/4$	0.5	4	$1/3$	0.5	2	4	$2/3$	2π	2.5	0.5	$2/\pi$

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\frac{1}{3}$	-0.5	12	4	0	$\cos a$	$-\sin a$	$\frac{1}{\cos^2 a},\ a\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\quad k=0,\pm1,\ldots$	$\sqrt{2}$	0

IV

1	2	3	4,5,6	7	8	9	10	11	12	13	14, 15	16	17	18	19	20
$\sqrt{2/3}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	e^3	e^{-2}	e^{2a}	e	e^{-1}	e^{x+1}	1	0	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{5}$	-2	1

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{\log e}{x^2}$	$\ln a$	e^2	$\frac{\ln 3}{\ln 2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	∞	1	0	1	-1	0	1	0	1

פתרונות חלקיים

I 1) $x\to 1\Rightarrow x_n=1+\alpha_n\Rightarrow \lim\limits_{x_n\to 1}\frac{1}{(1-x_n)^2}=\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\frac{1}{(\alpha_n)^2}=+\infty$

II

3) $(1+x)^5-(1+5x)=x^2(10+10x+5x^2+x^3)$

7) $\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\dfrac{(2-3/x)^{20}(3+2/x)^{30}}{(2+1/x)^{50}}$

10) $\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{x}+2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{1+2x-9}{x-4}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}$

11) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=\frac{1-x-9}{8+x}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}$$

12) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

III

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\langle \pi-x=t\rangle=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(7\pi-7t)}{\sin(4\pi-4t)}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 7t}{\sin 4t}$

5) $\dfrac{\tan 4x}{x}=\dfrac{\sin 4x}{4x}\dfrac{4}{\cos 4x}$

7) $\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=2\dfrac{(\sin(x/2))^2}{\sin^2 x}\dfrac{1}{\cos x}=\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\dfrac{0.5}{\cos x}$

9) $\cos x-\cos 3x=-2\sin 2x\ \sin(-x)$ 10) $\arcsin x=t$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{3\sin t}$

12) $\arctan 5x=t\Rightarrow x=0.2\tan t$

13) $x-\pi/4=y$, $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan 2x)\tan(\pi/4-x)=\lim\limits_{y\to 0}\tan(2y+\pi/2)\tan(-y)=$

$\lim\limits_{y\to 0}\cot 2y\ \tan y=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2y}{\sin 2y}\dfrac{\sin y}{y}\dfrac{\cos 2y}{2\cos y}$

15) $\dfrac{2x-\arctan x}{2x+\arcsin x}=\dfrac{2-(\arctan x)/x}{2+(\arcsin x)/x}$ 16) $\dfrac{\sin(1-x)}{1-x}\dfrac{-1}{1+x}$

17) $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+9}-3}=\dfrac{\sin 2x}{x+9-9}(\sqrt{x+9}+3)$ 18) $\dfrac{4x-\sin 3x}{x+\cos 2x}=\dfrac{4-(\sin 3x)/x}{1+(\cos 2x)/x}$

20) $\sin x-\sin a=2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}$ 22) $\tan x-\tan a=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a}$

23) $\dfrac{\sqrt{2\sin^2(x^2/2)}}{2\sin^2(x/2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{|\sin(x^2/2)|}{\sin^2(x/2)}$

24) $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$, $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=1/(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

IV 1) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ 2) $(0.5)^1$ 4) $(0.5)^{+\infty}$ 5) $(1.5)^{-\infty}$

6) $\operatorname{tg}\left(0.125\pi+0.25\pi\right)=1+a\,,\ a>0\,,\quad (1+a)^{-\infty}$ 7) 1^{1}

8) $\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(1+\dfrac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}\cdot\frac{3x^2}{x^2-2}}$ 12) $(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cos\pi x}$

13) $\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\dfrac{1+x}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{1+x}\frac{n}{n-1}(1+x)}$ 14) $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$

16) $\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=2\cos\dfrac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\dfrac{\ln(1+1/x)}{2}$

17) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}\frac{1}{a}}$ 18) $\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\dfrac{2\ln x+\ln(1-1/x+1/x^2)}{10\ln x+\ln(1+1/x^9+1/x^{10})}$

22) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}=\dfrac{\ln\sqrt{x}+\ln(1/\sqrt{x}+1+1/\sqrt[6]{x})}{\ln\sqrt[3]{x}+\ln(1/\sqrt[3]{x}+1+1/\sqrt[12]{x})}$

23) $\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}=\log\left(\dfrac{x^2-h^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{h^2}}=\log\left(1-\dfrac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}\ \frac{-1}{x^2}}$

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left\langle\begin{matrix}a^x-1=y\\ x=(\ln(y+1))/\ln a\end{matrix}\right\rangle=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\ln(y+1)}\ln a=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln a}{\ln(y+1)^{1/y}}$

25) $(x+e^x)^{1/x}=(1+(x+e^x-1))^{\frac{1}{x+e^x-1}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)}$ 30) $+\infty+(+\infty)=\infty$

28) $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(\sqrt[n]{n})=\ln1=0$

$b)\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\dfrac{n}{n+1}\right)=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n}=0$

$\forall x: n<x<n+1, n\in\square\ \Rightarrow y_n<\dfrac{\ln x}{x}<z_n\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0+}(x\cdot\ln x)=-\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1/x)}{1/x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0+}(x\cdot\ln x)=0$

31) $\lim\limits_{x\to0-}(1/x)=-\infty,\quad\lim\limits_{x\to0-}e^{1/x}=0$ 32) $\lim\limits_{x\to0+}e^{1/x}=\infty$

38) $1/x=k(x)+r(x),\ 0\le r(x)<1,\ k(x)\in Z,\ \left[1/x\right]=k(x),\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{r(x)}{k(x)}=0$

$x\cdot\left[1/x\right]=\dfrac{1}{k(x)+r(x)}k(x)=\dfrac{1}{1+r(x)/k(x)}$