

תרגיל 7 (נגזרת של פונקציה)

1. חשב על סמך ההגדרה את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} & \text{א) } f(x) = \cos(x^2) \quad \text{ב) } f(x) = \sqrt{\ln x} \quad \text{ג) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} \quad \text{ד) } f(x) = 2^{\cos x} \\ & \text{ה) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

2. הוכח על סמך ההגדרה כי הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $x=0$, אך אינן גזירות בנקודה זו:

$$\text{א) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \quad \text{ב) } f(x) = e^{|x|} \quad \text{ג) } f(x) = |\ln(x+1)|, \quad x > -1$$

3. הוכח על סמך ההגדרה כי הפונקציה הבאות גזירות בכל התחום הממשי:

$$\text{א) } f(x) = \begin{cases} 3 \sin x, & x < 0 \\ x^2 + 3x + 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ב) } f(x) = |x^3|$$

4. חקור את תחומי הגזירות של הפונקציות הבאות:

$$\text{א) } f(x) = |(x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^3| \quad \text{ב) } f(x) = |\cos x|$$

$$\text{ג) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4} \cdot (x+1)^2, & (|x| \leq 1) \\ |x| - 1, & (|x| > 1) \end{cases}$$

5. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א) אם הפונקציה $f(x)$ גזירה, אז גם הפונקציה $|f(x)|$ גזירה;
- ב) אם הפונקציה $|f(x)|$ גזירה, אז גם הפונקציה $f(x)$ גזירה;
- ג) אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=a$ ואילו הפונקציה $|f(x)|$ אינה גזירה בנקודה $x=a$, אז מתקיים $f(a)=0$;
- ד) אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=a$ וגם הפונקציה $|f(x)|$ גזירה בנקודה $x=a$, אז מתקיים $f(a) \neq 0$;
- ה) אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x=a$ אז גם הפונקציה $[f(x)]^2$ גזירה בנקודה זו;
- ו) אם הפונקציה $[f(x)]^2$ גזירה בנקודה $x=a$ אז גם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה זו.

6. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} & \text{א) } f(x) = \arctg\left(\frac{x^2}{a}\right) \quad \text{ב) } f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ג) } f(x) = \ln\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \\ & \text{ד) } f(x) = \arctg\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

$$; f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) \quad (\text{ז}) \quad ; f(x) = \ln \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{ח})$$

$$; f(x) = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0) \quad (\text{ט}) \quad ; f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \quad (\text{י})$$

$$. f(x) = x \cdot [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] \quad (\text{יא})$$

7. תהי $g(x)$ פונקציה גזירה. לאילו ערכים של הפרמטרים A ו- B הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \leq a \\ Ax + B & , x > a \end{cases}$$

- (א) אינה רציפה בנקודה $x = a$;
 (ב) רציפה בנקודה $x = a$ אך אינה גזירה בה;
 (ג) גזירה בנקודה $x = a$.

8. נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x^m \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

כאשר m שלם ואי-שלילי ($m \geq 0$). עבור אילו ערכים של m הפונקציה

- (א) רציפה בנקודה $x = 0$?
 (ב) גזירה בנקודה $x = 0$?
 (ג) גזירה ברציפות בנקודה $x = 0$ (ז"א $f'(x)$ רציפה בנק' $x = 0$)?

$$9. \text{ נתונה פונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

חקור את גזירות של הפונקציה בנק' $x = 0$.

תשובות

$$1. \text{ (א) } -2x \sin(x^2) \quad (\text{ב}) \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \quad (\text{ג}) -\frac{1}{2(2x+5)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{ד}) -\sin x \cdot 2^{\cos x} \cdot \ln 2$$

$$4. \text{ (א) לא גזירה בנק' } x=1 \quad (\text{ב}) \text{ לא גזירה כאשר } x = \frac{2k-1}{2} \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{ג}) \text{ לא גזירה בנק' } x=-1$$

$$6. \text{ (א) } \frac{2ax}{x^4+a^2} \quad (\text{ב}) \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (|x|>1) \quad (\text{ג}) \frac{1}{2x \cdot \sqrt{x-1} \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x>1)$$

$$7. \text{ (א) } \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x>1) \quad (\text{ב}) -\frac{1}{(1-x) \cdot \sqrt[3]{x}} \quad (x<1) \quad (\text{ג}) \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (\text{ד})$$

$$; 1 + x^x(1 + \ln x) + x^x \cdot x^{x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right), x > 0 \quad (\text{ז} ; \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} \quad (\text{ח}$$

$$. 2 \sin(\ln x), x > 0 \quad (\text{ט}$$

$$\cdot \begin{cases} A \cdot a + B = g(a) \\ g'(a) = A \end{cases} \quad (\text{א} ; \begin{cases} A \cdot a + B = g(a) \\ g'(a) \neq A \end{cases} \quad (\text{ב} ; A \cdot a + B \neq g(a) \quad (\text{ג} . 7$$

$$. m \geq 3 \quad (\text{א} ; m \geq 2 \quad (\text{ב} ; m \geq 1 \quad (\text{ג} . 8$$

$$. x=0 \quad \text{פונקציה גזירה בנק'}$$

בהצלחה!