

נוסחת טיילור

עבור הפונקציה $f(x)$ רשום את הפולינום טיילור מסדר n סביב הנקודה x_0

1) $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, x_0 = -1$ 2) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4, n = 2$

3) $f(x) = \cosh(2x - 2), x_0 = 1, n = 2$

{4 מצא הפולינום $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ אם נתון כי
 $p(-1), p'(0)$ חשב $p(2) = -1, p'(2) = 0, p''(2) = 4, p'''(2) = -6$

רשום פולינום מקלורן מסדר n עבור הפונקציות הבאות:

5) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}, n=3, f''(0) = ? f'''(0) = ?$ 6) $f(x) = \frac{(1+x)^{10}}{(1-4x^2)^4}, n=2$

7) $f(x) = \ln \cos x, n=3$ 8) $f(x) = \sqrt[3]{a^3+x}, (a > 0), n=2$

9) $f(x) = \sin(\sin x), n=3$ 10) $f(x) = e^{2x-x^2}, n=2$ 11) $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}, n=3$

תוך שימוש בפיתוחי היסוד רשום את הפולינום טיילור מסדר n סביב הנקודה x_0 עבור הפונקציה $f(x)$

12) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4, n = 2$ 13) $f(x) = e^{2x}, x_0 = -1, n = 2$

14) $f(x) = \sin 2x, x_0 = \pi/2, n = 2$ 15) $f(x) = \ln x, x_0 = e, n = 2$

הערך את השגיאה בנוסחאות המקורבות הבאות:

16) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 0.1$ 17) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, 0 \leq x \leq 1$

18) $\sin x \approx x - x^3/6, |x| \leq 0.5$

19) עבור אילו ערכים של x מתקיים בדיוק עד 10^{-4} השוויון המקורב $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$?

חשב בקרוב באמצעות נוסחת טיילור מסדר 2. הערך את השגיאה 20) $\sqrt[3]{30}$ 21) $\ln 1.2$

חשב את המספרים הבאים בדיוק עד כדי ε : 22) $\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon = 10^{-3}$ 23) $\sin 18^\circ, \varepsilon = 10^{-4}$

חשב את הגבולות הבאים תוך שימוש בפיתוחי היסוד:

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$ 28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right)$

29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, (a > 0)$ 30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$

31) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ 32) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$ 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

$$1) f(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3 \quad 2) 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + R_2(x)$$

$$3) 1 + 2(x-1)^2 + R_3(x)$$

$$4) p(x) = -1 + 2(x-2)^2 - (x-2)^3, \quad p(-1) = 44, \quad p'(0) = -20$$

$$5) 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3), \quad f''(0) = 4, \quad f'''(0) = 0 \quad 6) 1 + 10x + 61x^2 + o(x^2)$$

$$7) -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad 8) a + \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} + o(x^2) \quad 9) x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$10) 1 + 2x + x^2 + o(x^2) \quad 11) -\frac{x^2}{6} + o(x^3) \quad 12) \sqrt{x} = \sqrt{4 + (x-4)} = 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{x-4}{4}} =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{x-4}{4 \cdot 2} - \frac{(x-4)^2}{16 \cdot 8} + o((x-4)^2) \right) = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + o((x-4)^2)$$

$$13) \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2}(x+1) + \frac{2}{e^2}(x+1)^2 + o((x+1)^2)$$

$$14) \sin 2x = \sin(\pi - 2x) = -\sin(2(x - \pi/2)) = -2(x - \pi/2) + o((x - \pi/2)^2)$$

$$15) 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} + o((x-e)^2)$$

$$16) f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + R_1(x), \quad R_1(x) = \frac{f''(C)}{2} x^2 = -\frac{1}{4(1+C)^{3/2}} x^2, \quad 0 < C < 0.1$$

$$|R_1(x)| < \frac{1}{4} x^2 \leq \frac{0.01}{4} = 0.0025, \quad 0 \leq x \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \right| < 0.0025$$

$$17) 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \right| < \frac{e}{(n+1)!}$$

$$18) \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} = R_4(x) = \frac{f^{(5)}(C)}{5!} x^5 = \frac{\cos C}{5!} x^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R_4(x)| \leq \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840} \quad \left(|x| \leq 0.5 \Rightarrow \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{1}{3840} \right)$$

$$19) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x), \quad |R_3(x)| = \frac{|\cos C|}{4!} x^4 \leq \frac{x^4}{4!} \leq \frac{1}{10^4} \Rightarrow |x| \leq \frac{\sqrt[4]{24}}{10} \approx 0.22$$

$$|x| \leq 0.22 \Rightarrow \left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq 10^{-4}$$

$$20) \sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1+1/9} = 3\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} - \frac{1}{9 \cdot 81}\right) \approx 3.107, \quad \varepsilon \approx 0.00025$$

$$21) \ln 1.2 \approx 0.18, \quad R_2(x) = \frac{2}{(1+C)^3} \frac{x^3}{6}, \quad \varepsilon \approx 0.003$$

$$22) f(x) = e^x, \quad 0 < c < 0.5, \quad R_n(0.5) < \frac{e^{0.5}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{2^n(n+1)!} \Rightarrow R_2 < \frac{1}{24}, \quad R_3 < \frac{1}{192},$$

$$R_4 < \frac{1}{1920} < 10^{-3}, \quad \sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 4!} \approx 1.648$$

$$23) \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}, \quad |R_2\left(\frac{\pi}{10}\right)| < \frac{0.3142^3}{3!} \approx 0.0052, \quad |R_4\left(\frac{\pi}{10}\right)| < \frac{0.3142^5}{5!} \approx 0.000026$$

$$\sin 18^\circ \approx 0.3142 - \frac{0.3142^3}{3!} \approx 0.3090$$

$$24) -\frac{1}{12} \quad 25) \frac{1}{3}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) = \dots = -\frac{1}{4}$$

$$27) \frac{1}{3} \quad 28) \frac{1}{6} \quad 29) \ln^2 a \quad 30) \frac{1}{2} \quad 31) 0 \quad 32) \frac{1}{3} \quad 33) \frac{1}{2}$$

$$34) x^2 \quad 35) \frac{x}{2}$$