דפי נוסחאות

I. גבולות

1. *הגדרת הגבול* : נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ אם ורק אם $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

3. *משפט הכריך (סנדוויץ')* : תהיינה $f(x),\ g(x),\ h(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבה נקובה של x_0 ומקיימות בסביבה זו את התנאי $h(x)\le f(x)\le g(x)$. אם קיימים הגבולות $\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=L$, אז קיים גם הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$.

4. *משפט (מכפלה של פונקציה אפסה בפונקציה חסומה)* : אם $f(x)$ חסומה בסביבה נקובה של x_0 ואם $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$ אז $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

5. גבולות מיוחדים:

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$	$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

II. פונקציות רציפות

1. *אריתמטיקה של פונקציות רציפות*. תהיינה $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בנקודה x_0. אז
   א. הפונקציות $(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ (f\cdot g)(x)$, רציפות בנקודה x_0.
   ב. הפונקציה $(f/g)(x)$ רציפה בנקודה x_0, בתנאי ש- $g(x_0)\neq 0$.

2. אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ ו- $f(a)\cdot f(b)<0$, אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=0$.

3. *משפט ערך הביניים של קושי*: אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ ו- t הוא מספר ממשי כך ש $f(a)<t<f(b)$ או $f(b)<t<f(a)$, אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=t$.

III. נגזרות

1. *הגדרת הנגזרת:* $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

2. *נוסחת הקירוב הלינארי* : $f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

3. אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 אז משוואת הישר המשיק לגרף $y=f(x)$ בנקודה $(x_0,f(x_0))$ היא: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

4. *משפט*: אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 וגזירה בסביבה של x_0 ואם הגבולות הבאים קיימים וסופיים $L_+ = \lim_{x\to x_0^+} f'(x), \quad L_- = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ אז:

א. $L_+ = L_- \Leftarrow$ $f(x)$ גזירה ב- x_0 ומתקיים $f'(x_0) = L_+ = L_-$.

ב. $L_+ \neq L_- \Leftarrow$ $f(x)$ לא גזירה ב- x_0.

בנוסף, אם L_+ או L_- הם ∞ או $-\infty$ אז $f(x)$ לא גזירה ב- x_0.

5. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x אז

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$ (בתנאי ש $g(x) \neq 0$).

6. *כלל השרשרת*: אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 ו- $g(x)$ גזירה ב- $y_0 = f(x_0)$, אזי $\left(g \circ f\right)(x)$ גזירה ב- x_0 ו- $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

7. *משפט פרמה*: אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 ואם x_0 נקודת קיצון מקומי של $f(x)$ אז $f'(x_0) = 0$.

8. *משפט רול*: תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת $c \in (a,b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

9. *משפט הערך הממוצע של לגרנג׳*: אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b), אז קיימת $c \in (a,b)$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

10. *כלל לופיטל* (אחת מהגירסאות): יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ גזירות בסביבה נקובה מסוימת של x_0. נניח כי:

(א). $g'(x) \neq 0$ לכל x בסביבה הנקובה של x_0 (ב) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (ג) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

אז קיים גם הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

11. *משפט*: תהי $f(x)$ גזירה ב- (a,b) אז $f(x)$ מונוטונית עולה (במובן חזק) אם ורק אם מתקיימים שני התנאים:

(א) $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$ (ב) $f'(x)$ לא מתאפסת באופן זהותי באף קטע חלקי ל- (a,b).

12. *משפט*: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- x_0 וגזירה בסביבה הנקובה של x_0, אז x_0 נקודת קיצון מקומית של $f(x)$ אם ורק אם $f'(x)$ משנה את סימנה כאשר היא עוברת דרך הנקודה x_0.

13. *משפט (מבחן הנגזרת השניה)*: תהי x_0 נקודה סטציונרית של $f(x)$ (כלומר $f'(x_0) = 0$) ונניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים ב- x_0.

(א) אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 נקודת מינימום מקומי (ב) אם $f''(x_0) < 0$ אז x_0 נקודת מכסימום מקומי

14. *משפט (מבחן הנגזרת ה- n-ית)*: תהי x_0 נקודה כך ש- $f(x)$ גזירה n פעמים ב- x_0 וכך שמתקיים $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(i) אם n אי-זוגי אז x_0 איננה נקודת קיצון מקומי (ii) אם n זוגי אז x_0 נקודת קיצון מקומי:

א. אם $f^{(n)}(x_0) > 0$ אז x_0 נקודת מינימום מקומי ב. אם $f^{(n)}(x_0) < 0$ אז x_0 נקודת מכסימום מקומי.

15. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בנקודה x_0 ונניח כי $f''(x)\neq 0$. אם $f''(x_0)>0$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מעלה ("מחייכת") ב- x_0 , אם $f''(x_0)<0$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מטה ("עצובה") ב- x_0 .

16. $y=ax+b$ הוא אסימפטוטה ב- ∞ לגרף $y=f(x)$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ו- $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$

IV . <u>אינטגרלים</u>

1 . אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ ו- $a\neq 0$ אז $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)$

2. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז $\int f(u(x))u'(x)dx=F(u(x))+C$.

3. *נוסחת אינטגרציה בחלקים*: $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$.

4. *משפט הערך הממוצע האינטגרלי* : אם $f(x)$ היא פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אז קיימת $c\in(a,b)$

כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$. (*הערה:* $f_{ave}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ נקרא הערך הממוצע של f בקטע $[a,b]$)

5. *המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי:*

אם $f(x)$ היא פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אזי הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ היא פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיים השוויון $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$.

6. $$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right)=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$$

7. *נוסחת ניוטון – לייבניץ:* תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז מתקיים $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

8. נניח כי $f(x)\geq g(x)$ בכל נקודה בקטע $[a,b]$. יהי A התחום הכלוא בין העקומות $y=f(x)$, $y=g(x)$, $a\leq x\leq b$.

1. השטח של התחום A : $S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

2. נפח גוף הסיבוב הנוצר כאשר התחום A מסתובב סביב ציר ה-x: $V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$

טבלת נגזרות ואינטגרציה

1A.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ (n \neq -1)$	1B.	$(x^n)' = nx^{n-1}$
2A.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	B.2	$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$
3A.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	3B.	$(\cos x)' = -\sin x$
4A.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	4B.	$(\sin x)' = \cos x$
5A.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	5B.	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6A.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	6B.	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7A.	$a > 0 \ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	7B.	$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$
8A.	$\int e^x dx = e^x + C$	8B.	$(e^x)' = e^x$
9A.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	9B.	$(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2} \quad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
10A.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	10B.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11A.	$\int \sinh x = \cosh x + C$	11B.	$(\cosh x)' = \sinh x$
12A.	$\int \cosh x = \sinh x + C$	12B.	$(\sinh x)' = \cosh x$

נוסחאות טריגונומטריות

.1 זהויות בסיסיות

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
	$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

2.. פונקציות טריגונומטריות של זוויות מיוחדות

$\sin 0 = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \cos 0$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$	$ctg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = ctg\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3. פונקציות טריגונומטריות של סכום והפרש זוויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\; tg\,\beta}$	

4. פונקציות טריגונומטריות של זווית כפולה

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\sin(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$	$\cos(2\alpha) = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

5. נוסחאות המרה מכפל לסכום

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$	

6. נוסחאות המרה מסכום לכפל

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

פונקציות היפרבוליות

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

נוסחאות אלגבריות

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$