תשובות לתרגיל MCHQ-1

1 (c), 2 (a), 3 (b), 4 (d), 5 (c), 6 (a)

7 (c), 8 (b), 9 (a), 10 (b)

MCHQ - 1 פתרון / לתרגיל

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n^3}n^3+1}{2n^3+3} \underset{k=n^3}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k\cdot k+1}{2k+3} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k\cdot k}{2k+3} + \underbrace{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+3}}_{=0} \to$$ לא ק"ם

לא ק"ם

כי:

$\frac{k}{2k+3} \to \frac{1}{2}$ עבור k זוגי נקבל

$-\frac{k}{2k+3} \to -\frac{1}{2}$ עבור k אי-זוגי נקבל

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_5 n}{\log_9 n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n\cdot\ln 9}{\ln 5\cdot\ln n} = \frac{\ln 9}{\ln 5}$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\log_2 n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\log_2 n}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\cos n}_{\text{חסומה}} = 0$$

4. $$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = n^2(n+1)$$
$$- \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = (n-1)^2 n$$

$$a_n = n(\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} + 2n - 1) = n(3n-1)$$

5. $a_n = 0$ עבור $\underbrace{0 \le n < k-1}_{k \text{ מספרים}}$

$a_n = 1$ עבור $\underbrace{k \le n < 2k-1}_{k \text{ מספרים}}$

⇐ עבור ו $a_n = [\frac{k}{n}]$ מספר שווה של אפסים,

אחדים, שנ"ם, שלוש וכו' ⇐ (c)

6. $1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+n) =$

$$= 1 + \frac{1+2}{2}\cdot 2 + \frac{1+3}{2}\cdot 3 + \dots + \frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1) + \frac{1+n}{2}\cdot n$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_k = \frac{1+k}{2}\cdot k = \frac{1}{2}(k^2+k)$$

$$a_1 + \dots + a_n =$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1 \\ &+ \frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\cdot 2 \\ &+ \frac{1}{2}\cdot 3^2 + \frac{1}{2}\cdot 3 \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{2} n \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}(1^2+2^2+\dots+n^2) + \frac{1}{2}(1+2+\dots+n)$$

פולינום מעלה 3 (for $\frac{1}{2}(1^2+2^2+\dots+n^2)$)

פולינום מעלה 2 (for $\frac{1}{2}(1+2+\dots+n)$)

$\Leftarrow$ בסה"כ פולינום מעלה 3

7. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n \sin\frac{1}{n}}_{1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n(\cancel{n^2}+3-\cancel{n^2})} = \frac{2}{3}$$

8. $$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}+2} < \sqrt[n]{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = 2^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}+2} \xrightarrow{n\to\infty} e$

$2^{\frac{1}{n}} \to 1$, $\quad 2^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

9. $a_1=2$ $\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n-1}$

א) נוכיח באינדוקציה ש- $a_n>1$

1. $a_1=2>1$

2. אם $a_n>1$ אז

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n-1}>\sqrt{1+1-1}=1 \Rightarrow a_{n+1}>1$$

ב) נוכיח ש- $a_n\uparrow$

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_n-1} \overset{?}{\geq} a_n$$

$$\cancel{a_n^2}+a_n-1 \overset{?}{\geq} \cancel{a_n^2}$$

$$a_n \overset{?}{\geq} 1$$

נוכיח בדרך השלילה ש- a_n לא חסומה מלמעלה.

נניח ש- a_n חסומה מלמעלה. הוכחנו ש- $a_n\uparrow$

⇐ ל- a_n קיים גבול סופי L אז

$$L=\sqrt{L^2+L-1}$$

$$\cancel{L^2}=\cancel{L^2}+L-1 \Rightarrow L=1$$

ג $a_1=2$ ו- $a_n\uparrow$ ⇐ לכל n $a_n>2$

⇐ $L=\lim_{n\to\infty} a_n \geq 2$ - סתירה

(10) (a) לא נכון $a_n=1$ - חסומה, $0\neq b_n=\frac{1}{n}$ חסומה

אבל $\frac{a_n}{b_n}=n$ לא חסומה

(b) נכון אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=10$

10

אז קיים N כך שלכל $n>N$ $\frac{a_n}{n} > g$

⇐ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ⇐ $a_n > gn \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

(c) לא נכון. נסמן $c_n = a_n + b_n$

אם c_n מתכנסת ו-a_n מתכנסת אז $b_n = c_n - a_n$ מתכנסת - סתירה

(d) לא נכון $a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת, $b_n = (-1)^n$ מתבדרת

אבל $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנסת