תשובות סופיות

1 (c)
2 (a)
3 (d)
4 (e)
5 (d)
6 (b)
7 (c)
8 (b)
9 (a)
10 (c)

① נסמן

$$\sqrt[n]{a}-1=t \quad \text{אז} \quad a=(1+t)^{\overset{[illegible]}{n}} \Rightarrow n=\frac{1}{\log_a(1+t)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim_{t\to 0} t\cdot\frac{1}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{1/t}}=$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

② נחשב תחילה את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^5+1^4+1^2}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^5+2^4+2^2}}+\dots+\frac{n+n}{\sqrt{n^5+n^4+n^2}}\right)$$

$$n\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n^5+n^4+n^2}}\le\frac{n+1}{\sqrt{n^5+1^4+1^2}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^5+2^4+2^2}}+\dots+\frac{n+n}{\sqrt{n^5+n^4+n^2}}\le$$

$$\le n\cdot\frac{n+n}{\sqrt{n^5+1^4+1^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{\sqrt{n^5+n^4+n^2}}\underset{\div n^{5/2}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2n}{\sqrt{n^5+1^4+1^2}}\underset{\div n^{5/2}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^5}}}=0$$

מכאן נובע כי על-פי משפט סנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^5+1^4+1^2}}+\dots+\frac{n+n}{\sqrt{n^5+n^4+n^2}}\right)=0$$

$$b_n=\sin\left(\sqrt{n^3}\right)$$

$$\left(\forall n \quad |b_n|\le 1\right)$$ סדרה חסומה

לכן הגבול המבוקש $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$

(לפי טענה: אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ו- b_n סדרה חסומה אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$)

3) שאלה הגבול נשתמש במבחן מנה לגבול של סדרות.

נתון:
$$a_n=\frac{(2n+1)!}{(n^2+1)^n\cdot 2^{n+1}}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!\,(n^2+1)^n\cdot 2^{n+1}}{\left((n+1)^2+1\right)^{n+1}\cdot 2^{n+2}\,(2n+1)!}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+3)}{(n^2+2n+2)}\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right)^n\qquad(*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+3)}{n^2+2n+2}\underset{\div n^2}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right)^n=\lim_{n\to 1}\left(1+\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}-1\right)\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n-1}{n^2+2n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n+2}{-2n-1}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n+2}{-2n-1}}\right)^{\frac{n^2+2n+2}{-2n-1}\cdot\frac{-2n-1}{n^2+2n+2}\cdot n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{-2n-1}=-\infty$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2-n}{n^2+2n+2}}=e^{-2}$$

נשוב לגבול $(*)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}<1$$

לכן על-פי מבחן המנה $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4) נסמן: $b_n = \sqrt[2^n]{a} - 1$. $a>1$, לכן $\forall n\in\mathbb{N}\ b_n>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a}-1}{\sqrt[2^n]{a}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a}-1}{\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2^{n+1}]{a}+1} = \frac{1}{2}$$

לפי טענה ידועה: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}$

כלומר, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[2^n]{a}-1} = \frac{1}{2}$

התשובה הנכונה לשאלה זו (e).

5) ניתן להגדיר את הסדרה באופן הבא:
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

נוכיח באמצעות שיטת האינדוקציה כי הסדרה מונוטונית עולה, כלומר נוכיח כי $\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_{n+1} > a_n$.

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. הטענה מתקיימת עבור $n=1$.

נניח כי עבור $n=k$ מתקיים: $a_{k+1} > a_k$ ונוכיח כי עבור $n=k+1$ מתקיים: $a_{k+2} > a_{k+1}$.

$$a_{k+2} = \sqrt{2+a_{k+1}} > \sqrt{2+a_k} = a_{k+1}$$

הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$. הטענה מתקיימת לכל n טבעי!

נוכיח באמצעות שיטת האינדוקציה כי הסדרה חסומה. כלומר נוכיח כי עבור כל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n < 2$.

$a_1 = \sqrt{2} < 2$, הטענה מתקיימת עבור $n=1$.

נניח כי עבור $n=k$ מתקיים: $a_k < 2$ ונוכיח כי עבור $n=k+1$ מתקיים: $a_{k+1} < 2$.

$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$

הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$. הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי!

הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן היא מתכנסת. נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} \Leftarrow$$

$$L=\sqrt{2+L} \Leftarrow L=-1 \text{ או } L=2$$

$L=-1$ פתרון זר של המשוואה, לכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

6 התשובה הנכונה שלפניה זו (d).

$a_n > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{100+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{100}{n}+1} = 0$$

לפי הגדרת הגבול מכאן נובע כי $\inf\{a_n\}=0$

לסדרה אין איבר מינימלי.

נמצא את האיבר המקסימלי של הסדרה. נפתור את אי-השוויון:

$a_{n+1} > a_n$

$\frac{\sqrt{n+1}}{101+n} > \frac{\sqrt{n}}{100+n}$. שני אגפים של אי-השוויון חיוביים לכן

$(n+1)(100+n)^2 > n(101+n)^2$

$(n+1)(10{,}000+200n+n^2) > n(10{,}201+202n+n^2)$

$n^3+200n^2+10{,}000n+n^2+200n+10{,}000 > 10{,}201n+202n^2+n^3$

$n^2+n-10{,}000<0$

$-100.5<n<99.5 \Longrightarrow$

$n\in\mathbb{N}$ לכן $1\le n\le 99$

מכאן נובע:

$a_1<a_2<a_3<\dots<a_{99}<a_{100}>a_{101}>a_{102}>\dots$

לסדרה יש איבר מקסימלי! האיבר המקסימלי הוא $a_{100}=\frac{\sqrt{100}}{100+100}=\frac{1}{20}$

לסדרה קיים איבר מקסימלי לכן $a_{max}=a_{100}=\sup\{a_n\}=\frac{1}{20}$

התשובה הנכונה לשאלה זו היא (b).

(7)

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=0$$

מכאן $a_{n+1}-a_n<0 \Longrightarrow a_{n+1}<a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$, לכן

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}}_{n+1 \text{ מחוברים}}=\frac{n+1}{2n}=$$

$$=\frac{n}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n>\frac{1}{2}$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת, לכן $\frac{1}{2}<a_n\le a_1=\frac{3}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

הסדרה חסומה. לכן הסדרה מתכנסת. (כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.)
התשובה הנכונה לשאלה זו היא (c).

---

(8) (1) הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית: $a_n=\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$$

הסדרה $\{a_n\}$ אינה מתכנסת.

(2) הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = 1-(-1)^n$, $b_n = 1+(-1)^n$.

$\lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n$ אינם קיימים.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-(-1)^n\right)\left(1+(-1)^n\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1^2-(-1)^{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-1) = 0.$$

(3) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \log(\log n)$, אז $a_{2n} = \log(\log 2n)$.

$$a_{2n} - a_n = \log(\log 2n) - \log(\log n) = \log\left(\frac{\log 2n}{\log n}\right) = \log\left(\frac{\log 2 + \log n}{\log n}\right) =$$

$$= \log\left(1 + \frac{\log 2}{\log n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log(\log n) = \infty \Leftarrow$ הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

---

(4) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = L$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ אינו קיים.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot(-1)^n\right) = 0$$

$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ קיים.

התשובה הנכונה לשאלה זו היא (b).

9 (1) הטענה נכונה.

לכל מספר ממשי x מתקיים: $x-1 < [x] \le x$, לכן $na-1 < [na] \le na$.

$$\Leftarrow \frac{na-1}{n} < \frac{[na]}{n} \le \frac{na}{n} \Longleftarrow a - \frac{1}{n} < \frac{[na]}{n} \le a.$$

בעזרת משפט סנדוויץ' נקבל ש $\lim_{n\to\infty} \frac{[na]}{n} = a$.

(2) הטענה נכונה.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 10 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |a_n - 10| < \varepsilon$$

$$10 - \varepsilon < a_n < \varepsilon + 10$$

נבחר $\varepsilon = 0.01$ $\Leftarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n > N$ $a_n > 10 - 0.01 = 9.99$

(3) הטענה נכונה.

נתון $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ $(L\neq 0)$, אז $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=L$, אז

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{L}{L}=1.$$

(4) הטענה נכונה.

נתון: $\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n)=1$, אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n a_n}{n}\right)=0$$

לכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה (כל סדרה מתכנסת חסומה).

התשובה הנכונה לשאלה זו היא (a).

(10) (1) הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית: $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$. $a_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n$$

גבול זה אינו קיים. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)\neq\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)\neq-\infty$.

(2) הטענה נכונה. נגדיר שתי סדרות: $x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$, $y_n=\frac{1}{2}(a_n-b_n)$

לפי הנתון: $\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$ קיימים.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ קיים,

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ קיים (לפי אריתמטיקה של גבולות).

(3) הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית: $a_n=\frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $a_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0.$$

(4) הטענה נכונה.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה, לכן $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ או $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ (גבול סופי).

אם $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$, אז גם $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=+\infty$ ואז $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$.

סתירה הרי הסדרה b_n מתכנסת.

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (גבול סופי). הסדרה a_n מתכנסת.

התשובה הנכונה לשאלה זו היא (C).