סבכות (פתרונות) פרק (MCHD1.2

1. (b), 2(e), 3(c), 4(d), 5(a),
6. (b) 7(a), 8(a) 9(d), 10(b)

MCHD 1 add2-sol

סכום (פרוגני)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$ (1)

$$=\lim\left(\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\tfrac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n+1}}\right)=1.$$

$$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$ (2)

<u>מונוטוני:</u>

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\cancel{\left(1+\frac{1}{4}\right)}\cdots\cancel{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\cancel{\left(1+\frac{1}{4}\right)}\cdots\cancel{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}}=$$

$$1+\frac{1}{2^{n+1}}>1 \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}>a_n$$

סדרה עולה (מונוטוני)

<u>חסומה:</u>

$$\ln a_n=\ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right)=$$

$\ln(1+x)<x$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots}_{\text{סכום סדרה הנדסית}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$q=\frac{1}{2}<1$$

$$S_n=\frac{a_1}{1-q}$$

$$\ln a_n<1$$

$$\Downarrow$$

$0<a_n<e \Rightarrow$ חסומה

$\Leftarrow$ מתכנסת

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$1-\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-2)\,n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)!-(n+2)!}{(n+4)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\,[\,(n+3)(n+4)(n+5)-1\,]}{(n+2)!\,(n+3)(n+4)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)(n+5)-1}{(n+3)(n+4)} \overset{n^3}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{n^3}-\frac{1}{n^3}}{\frac{(n+3)(n+4)}{n^3}} =$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{n+3}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+4}{n}\right)\left(\frac{n+5}{n}\right)-\frac{1}{n^3}}{\left(\frac{n+3}{n}\right)\left(\frac{n+4}{n}\right)\frac{1}{n}} = \lim \frac{\left(1+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}\right)\left(1+\overset{\to 0}{\frac{4}{n}}\right)\left(1+\overset{\to 0}{\frac{5}{n}}\right)-\frac{1}{n^3}}{\underbrace{\left(1+\frac{5}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}_{\to 0}} =$$

$$= \frac{1}{0} = \infty$$

5 נניח

(ב) (לא נכון)

$a_n > a_{n+1}$.

$$\sqrt{n^2+1} - n > \sqrt{(n+1)^2+1} - (n+1)$$

$$\sqrt{n^2+1} > \sqrt{(n+1)^2+1} - 1$$

$$\sqrt{n^2+1} + 1 > \sqrt{(n+1)^2+1}$$

מעלים בריבוע

$$n^2+1+2\sqrt{n^2+1}+1 > (n+1)^2+1.$$

$$\cancel{n^2}+\cancel{2}+2\sqrt{n^2+1} > \cancel{n^2}+2n+\cancel{1+1}$$

$$\cancel{2}\sqrt{n^2+1} > \cancel{2}n$$

$$\sqrt{n^2+1} > n$$

$$n^2+1 > n^2$$

$$1 > 0$$

משפט אמת

$\Leftarrow$ הנחה היתה נכונה

$\Leftarrow a_n > a_{n+1} \Leftarrow$ סדרה יורדת מונוטונית

(ג) גבול לא קיים: לא נכון

סדרה חסומה ומונוטונית – מתכנסת $\Leftarrow$ קיים גבול

(ד) לא נכון

סדרה חסומה בין

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$\Leftarrow$ אבריה לא שואפים לאינסוף

③ $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ (a) נכון:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \underset{n=1}{\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow$ סדרה חסומה.

---

⑥ $a_n = n \cdot \sin\frac{\pi n}{2}$ (b) נכון:

נתבונן בכמה איברים הראשונים

$1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$ (לא מונוטונית)

כל איבר במקומות $(4k-1)$ שלילי, במקומות $(4k-3)$ חיובי

במקומות $2k$ שווה לאפס

$n = 4k-3$
$$a_n = (4k-3)\sin\frac{\pi(4k-3)}{2} =$$
$$= (4k-3)\cdot\sin\left(2\pi k - \frac{3\pi}{2}\right) = (4k-3)\overbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}^{=1} = 4k-3 =$$
$$= 3(k-1)+k \geq k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\underset{\text{קבוע}}{\forall M > 0} \quad \exists k: \quad a_{4k-3} \geq k > M$

$\Leftarrow$ סדרה לא חסומה מלמעלה.

$n = 4k-1$
$$a_n = (4k-1)\sin\frac{\pi(4k-1)}{2} = (4k-1)\cdot\overbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{=-1}$$
$$= -4k+1 = -3k-(k-1) \leq -3k \ldots$$

באופן דומה אפשר להוכיח כי סדרה לא חסומה גם מלמטה.

$\Leftarrow$ סדרה לא חסומה.

(7)

a) נכון:

$$a_n = \frac{(-1)^n n + 15}{\sqrt{n^2+10}}$$

$$a_n < \frac{1 \cdot n + 15}{\sqrt{n^2+10}} < \frac{n + 15n}{\sqrt{n^2}} = \frac{16n}{\sqrt{n^2}} = 16$$

$$a_n > \frac{-n + 15}{\sqrt{n^2+10}} > \frac{-n - 15n}{\sqrt{n^2+10n^2}} = \frac{-16n}{\sqrt{11}\, n} = \frac{-16}{\sqrt{11}}$$

$\Leftarrow$ סדרה חסומה (חסומה משני הכיוונים)

c) לא נכון $a_{2k} = \frac{n+15}{\sqrt{n^2+10}} > 0$, $a_{2k+1} = \frac{-n+15}{\sqrt{n^2+10}} < 0$ $\underline{n>15}$ $\Leftarrow$ לא מונוטונית

(8)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)^2} + \sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ } + \sqrt[3]{(n^3+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)^2} + \sqrt[3]{n^3+2n^2+4}\sqrt[3]{n^3+1} + \left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+2n^2+4) - (n^3+1)}{-\ \ \text{''}\ \ -}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)^2} + \sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)(n^3+1)} + \sqrt[3]{(n^3+1)^2}} \quad \Big/ : n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)^2}}{\sqrt[3]{(n^2)^3}} + \frac{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+4)(n^3+1)}}{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^3} + \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2)^3}}}$$

$$n^2 = \sqrt[3]{(n^2)^3} = \sqrt[3]{(n^3)^2} = \sqrt[3]{n^3 \cdot n^3}$$

$$= \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(9) $\lim \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n} = ?$

$$\sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n} = \sqrt[n]{7^n\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(-\frac{1}{7}\right)^n+1\right)} =$$

$$= 7\cdot\sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{7}\right)^n}_{\to 0}+1} \to 7$$

(10) $\lim \frac{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin(n)} =$ זאגום

$|:n$ ב

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{n^2+3n-1}}{n=\sqrt{n^2}} + \frac{\sqrt[3]{2n^2+1}}{n=\sqrt[3]{n^3}}\right)}{1+\frac{2\sin(n)}{n}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{1+\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} + \sqrt[3]{\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}}{1+\underbrace{\frac{1}{n}\cdot 2\sin(n)}_{\text{אפסה כפול חסומה} \to 0}} = 1$$