MCHQ-3 תשובות לתרגיל

1(d), 2(b), 3(c), 4(c), 5(b)

6(d), 7(b), 8(e), 9(b), 10(c), 11(e)

פתרונות של מבחן MCHQ-3

.1 $$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ x^2+x, & x\geq 1 \end{cases}$$

תנאי רציפות ב- $x=1$

$$\underset{f(1^-)}{\underset{\parallel}{a+b}} = \underset{f(1^+)}{\underset{\parallel}{2}}$$

$$f'(x)=\begin{cases} a, & x<1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$$

תנאי גזירות ב- $x=1$:

$$\underset{f'(1^-)}{\underset{\parallel}{a}} = \underset{f'(1^+)}{\underset{\parallel}{2\cdot 1+1}} \Rightarrow a=3$$

ולכן $a+b=2 \Leftarrow b=-1$

לכן מתקיים: $a+3b=0 \Leftarrow$ (d) נכון

.2 המשיק לגרף של f בנקודה $(1,2)$ הוא

$$x-2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\Leftarrow \quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

אם g פונקציה הפוכה ל- f אז

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=2$$

$\Leftarrow$ התשובה הנכונה היא (b)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ .3

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{חסומה}}=0=f(0)$$

לכן f רציפה ב-0, לכן (a) ו-(b) לא נכונים

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}-\overset{=f(0)}{0}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0} x^{-\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x} \longrightarrow$$ הגבול לא קיים

הוכחה:

1) $x_k=\frac{1}{\pi k} \Rightarrow \frac{1}{x_k}=\pi k \Rightarrow f(x_k)=0$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k)=0$

2) $t_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k} \Rightarrow \frac{1}{t_k}=\frac{\pi}{2}+2\pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t_k)=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

לכן הגבול לא קיים

אופן, f(x) רציפה ב-0 אך לא גזירה ב-0

⇐ התשובה הנכונה היא (c)

.4

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, & x\le 0\\[2mm] x^2\sin\dfrac{1}{x(x-1)}, & 0<x<1\end{cases}$$

רציפות ב-0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\underset{\downarrow\atop 0}{x^2}\,\underbrace{\sin\frac{1}{x(x-1)}}_{\text{חסומה}}=0$$

$$f(0)=0$$

$\Rightarrow$ רציפה ב-0

גזירות ב-0

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{x-1}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-1}=-1$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x(x-1)}-0}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\underset{\downarrow\atop 0}{x}\,\underbrace{\sin\frac{1}{x(x-1)}}_{\text{חסומה}}=0$$

אם $f'(0^+)\neq f'(0^-)$ אז f לא גזירה ב-0

אז התשובה הנכונה היא (ג)

5. לפי משפט לגרנז' בקטע $[a,b]$ מתקיים:

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a) > f(a)+c(b-a)$$

$a<c<b$ $\qquad$ $f'(c)>c$

לכן צריך לבדוק תשובות ב' (b), (c) או (d)

נקח $a=1$, אז בקטע $[1,b]$ נקבל

$$f(b) > f(1)+c(b-1) > f(1)+b-1 =$$

$1<c<b$ $\qquad$ $=4+b-1=3+b$

$$\Downarrow$$

$$f(b) > 3+b$$

(b): $b=3 \Leftarrow f(3)>3+3=6$ מתקיים

$\Leftarrow$ התשובה הנכונה היא (b)

בדיקת (c): $b=5 \Rightarrow f(5)>3+5=8$

וב-(c) כתוב $f(5)>10$ לא מתקיים

בדיקת (d): $b=3 \Rightarrow f(3)>3+3=6$

וב-(d) כתוב $f(3)>8$ לא מתקיים

6.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}, & x<-1\\ 2x-1, & -1\le x\le 2\\ |x-5|, & 2<x\le 6\\ e^{x-6}, & x>6\end{cases}$$

רציפות ב- $x=-1$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=-3$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(2x-1)=-3$$

$$f(-1)=-3$$

$x=-1$ יש רציפות של f

רציפות ב- :$x=2$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(2x-1)=3$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}|x-5|=3$$

$$f(2)=3$$

$x=2$ יש רציפות של f

רציפות ב- $x=6$

$$\lim_{x\to6^+} f(x)=\lim_{x\to6^+}e^{x-6}=1$$

$$\lim_{x\to6^-} f(x)=\lim_{x\to6^-}|x-5|=1$$

$$f(6)=1$$

$x=6$ יש רציפות של f

בדיקת גזירות:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} (x-2)' = 1$$

$$\neq \Rightarrow$$

f לא גזירה ב- $x=-1$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (2x-1)' = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-1)' = 2$$

$$\neq$$

f לא גזירה ב- $x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (5-x)' = -1$$

f לא גזירה ב- $x=5$ (ערך מוחלט)

$$\lim_{x\to 6^-} f'(x) = \lim_{x\to 6^-} (x-5)' = 1$$

$$\|$$

f גזירה ב- $x=6$

$$\lim_{x\to 6^+} f'(x) = \lim_{x\to 6^+} e^{x-6} = 1$$

⟸ התשובה הנכונה היא (d)

7. כלל לופיטל

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+2}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{3}{2}$$

התשובה הנכונה היא (b)

8. $y=0 \Leftarrow \frac{x^2-1}{x}=0 \Leftarrow x=\pm 1$ נקבל

כיון ש $x>0 \Leftarrow x=1 \Leftarrow$ מקבלים

על הנקודה $(1, 0)$

שיפוע המשיק לגרף $x=g(y)$ בנקודה $y=0$

הוא $g'(0)$. g הפוכה ל- $f \Leftarrow$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ התשובה הנכונה היא (e)

9. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$, $f(a)=b$, $g(y)$ הפוכה ל- $f(x)$ לכל $x>0$.

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$f'(x) = \left(x - x^{-2}\right)' = 1 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3+2}{x^3}$$

$$\Rightarrow g'(b) = \frac{a^3}{a^3+2}$$

$\Leftarrow$ התשובה הנכונה היא (b)

10.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2 + o(x^3)$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \left(x + o(x^2)\right)^2 = x^2 + 2x\,o(x^2) + \left(o(x^2)\right)^2 = x^2 + \underbrace{o(x^3) + o(x^4)}_{o(x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x^2 + 2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2x^2 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(x + 2 + \frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x\right)} = 2$$

$\Leftarrow$ התשובה הנכונה היא (c)

11.

$$f(x) = \begin{cases} a\sin^2 x + b(x+1), & x < 0 \\ x^2 + 2x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$$

נבדוק ב- $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(a\sin^2 x + b(x+1)\right) = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + 2x + 3\right) = 3$$

$\Leftarrow$ אם $b \neq 3$ אז f לא רציפה ב-0

$\Leftarrow$ (a), (b), (d) לא נכונים

גזירות ב- $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left[2a\sin x\cos x + b\right] = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+2) = 2$$

צ"ל שהיות $b=3$ (נתון), לכן f

לא גזירה ב- 0

התשובה הנכונה היא (e)