נוסחאות טיילור ומקלורן עם שארית בצורת לגרנז׳

נוסחת טיילור

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

כאשר $x < c < a$ או $a < c < x$.

נוסחת מקלורן

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

כאשר $x < c < 0$ או $0 < c < x$.

נוסחאות טיילור ומקלורן עם שארית בצורת פיאנו

נוסחת טיילור

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + o(x^n)$$

נוסחת מקלורן

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

נוסחאות מקלורן לפונקציות אלמנטריות עם שארית בצורת לגרנז׳

.1

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), R_n(x) = e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

.2

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n} = \sin\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

.3

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x) = \cos\left(c + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

.4

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

.5

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

כאשר $0 < c < x$ או $x < c < 0$.

נוסחאות מקלורן לפונקציות אלמנטריות עם שארית בצורת פיאנו

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),\ x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x \to 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\ x \to 0$