

פתרון
שאלה 1

בסיס האינדוקציה: $n = 1 \Leftarrow$ מתקיים שוויון.

$$\left| \sin \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k \quad \text{כי נניח שהוכח}$$

$$\left| \sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k \quad \text{ש נוכיח}$$

נשתמש בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right) = \left(\sin \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot \cos x_{n+1} + \left(\cos \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot \sin x_{n+1}$$

אבל $|\cos \alpha| \leq 1$ לכל α , וכן $\sin \alpha > 0$ לכל $0 < \alpha < \pi$, לכן:

$$\left| \sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| \leq \left| \sin \sum_{k=1}^n x_k \right| \cdot |\cos x_{n+1}| + \left| \cos \sum_{k=1}^n x_k \right| \cdot |\sin x_{n+1}| \leq \left| \sin \sum_{k=1}^n x_k \right| + \sin x_{n+1} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sin x_k + \sin x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k$$

{לפי הנחת האינדוקציה}