

## מבחן לדוגמה

יש להשיב על 5 בדיוק מתוך 6 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (20 נקודות).  
נמקו את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדויק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

1. נתונה סדרה  $(a_n)$  כך ש-  $a_1 > 0$ ,  $(n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ,  
הוכח כי הסדרה מתכנסת ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$ .

2. חקור פונקציה  $y = \frac{|x|^3}{x^2 - 4}$

(גבולות חד-צדדיים בנקודות האי-רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של גרף)

3. נתונה פונקציה  $f(x) = \begin{cases} m_1(x-a), & x < a \\ A(x-a)(x-b)(x-C), & a \leq x \leq b \\ m_2(x-b), & x > b \end{cases}$

כאן קווים ישרים  $y = m_1(x-a)$  [ב-]  $(-\infty, a]$  ו  $y = m_2(x-b)$  [ב-]  $[b, \infty)$  קשורים באמצעות פרבולה ממעלה שלישית  $y = A(x-a)(x-b)(x-C)$  בנקודות  $a$  ו-  $b$ .

מצא ערכים של הפרמטרים  $A$  ו-  $C$  שעבורם הפונקציה תהי גזירה בנקודות  $a$  ו-  $b$ .

4. מצא את הגבולות הבאים:

(א) (6 נק')  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(ב) (6 נק')  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x + x})$

(ג) (8 נק')  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

5. חשב את האינטגרלים הבאים:

(א) (6 נק')  $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$

(ב) (8 נק')  $\int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$

(ג) (6 נק')  $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

6. מצא את המקדמים  $a, b$  כך שכאשר  $x \rightarrow 0$  מתקיים  $\operatorname{ctg} x = \frac{1+ax^2}{x+bx^3} + o(x^4)$ .